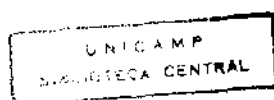


O LAPLACIANO EM VARIEDADES E ISOESPECTRALIDADE

ALUNO: CARLOS ANTONIO JULIO ARRIETA

ORIENTADOR: PROF. DR. RENATO H. PEDROSA

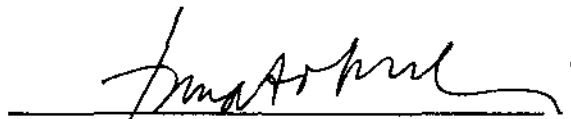
IMECC-UNICAMP



O LAPLACIANO EM VARIEDADES E ISOESPECTRALIDADE

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Carlos Antonio Julio Arrieta e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de agosto de 1993



Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Renato Pedrosa pelas muitas sugestões e correções feitas no meu trabalho e acima de tudo pela confiança e amizade brindada nas horas de consulta

Ao Prof. Dr. Paulo Brumatti pelas aulas e sugestões feitas do ponto de vista Algébrico ao meu trabalho.

À Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin e ao Prof. Dr. Luis A.B. San Martin pelas sugestões e correções feitas no meu trabalho.

A Angles de Fátima T. Espindola, secretária do Departamento de Matemática Aplicada, pela paciência e vontade na datilografia da tese.

A minha turma e amigos: Angela Marta, Ana Cláudia, Sônia Regina, Ademir, Gonzalo, Pedro, Allan, Guillermo, Ruben e Ronan pelas tristezas e alegrias no período 1991 e 1992.

A meus amigos de Doutorado: Janete, Cida, Pedro(che), Alexandre, Juan, Carlos, Cristian, Jesus, Daniel, João, Sebastian, Osvaldo, Francisco, Geraldo pela confiança, amizade e sugestões brindadas no período 1991 e 1992.

Às instituições CAPES, UNICAMP E U. DISTRITAL (Colombia) pelo suporte financeiro.

INTRODUÇÃO

Uma estrutura Riemanniana sobre uma variedade diferenciável M é uma classe de equivalências de métricas Riemannianas isométricas.

Denota-se a sequência $\{\lambda_i\}_{i \geq 0}$ de autovalores (com multiplicidade) do operador Laplaciano, $\Delta^{(p)}$, para as p -formas diferenciáveis sobre uma variedade Riemanniana (M, g) agindo sobre $\Omega^p(M)$ por $\text{Spec}^{(p)}(M, g)$ (espectro de (M, g)).

Sabe-se que o conhecimento do $\text{Spec}^{(p)}(M, g)$ determina por exemplo: a dimensão de M , o volume de (M, g) , e também caracteriza algumas variedades Riemannianas como: Toros planos bidimensionais, garrafas de klein planas em dimensão dois, etc.

Duas variedades Riemannianas (M, g) e (N, h) são $\Delta^{(p)}$ -isoespectrais se

$$\text{Spec}^{(p)}(M, g) = \text{Spec}^{(p)}(N, h),$$

e é claro que duas variedades Riemannianas isométricas são $\Delta^{(p)}$ -isoespectrais.

O espectro pode ser também estudado em variedades com bordo, considerando-se condições especiais sobre a fronteira, é dizer, condição de Dirichlet ou Neumann.

Neste trabalho pretende-se apresentar uma resposta em dimensão dois da seguinte pergunta:

DUAS VARIEDADES RIEMANNIANAS ISOESPECTRAIS SÃO NECESSARIAMENTE ISOMÉTRICAS?

No caso de domínios planais a questão toma uma forma atraente, já que os autovalores estão relacionados aos modos de vibração:

PODE-SE OUVIR A FORMA DE UM TAMBOR?

Esta é uma questão importante de Geometria Espectral, formulada por M. Kac nos anos 60.

HISTÓRIA DO PROBLEMA

O primeiro contra-exemplo, para o problema geral, foi dado por J. Milnor em 1964 quando ele mostrou que existem dois toros planos de dimensão 16, isoespectrais não isométricos. Neste sentido, também apresentam contra-exemplos: Ikeda (1980) em dimensão 5 e com curvatura $+1$, Vignéras (1980) usando superfícies de Riemann com curvatura -1 , e em 1982, H. Urakawa dá o primeiro exemplo de domínios isoespectrais não isométricos em \mathbb{R}^4 .

Em 1985 Sunada pela primeira vez sistematiza a construção de variedades isoespectrais não isométricas.

Buser em 1988, usando o resultado de Sunada exhibe duas superfícies planas isoespectrais não isométricas em \mathbb{R}^3 .

Os exemplos de Milnor e Vignéras são obtidos via certos resultados da Teoria dos Números. Nos exemplos de Sunada, ele usa alguns resultados da Teoria dos Grupos. Buser usa Grafos para construir seus exemplos.

Após estes trabalhos, pesquisaram também nesta linha Berard, Brook, Gordon, Pesce, Webb, Wolpert e outros. Ver, por exemplo, [BD4], [BD5], [BK1], [BK2], [PE], [G-W-W1] e [G-W-W2] entre outros.

Recentemente (ver por exemplo [BD5], [G-W-W1], [G-W-W2], [PE]) foram obtidos exemplos de variedades Riemannianas isoespectrais, não isométricas com bordo, em dimensão dois (imersas no plano), de forma não trivial. Estes exemplos serão parte do objetivo principal deste trabalho, junto com a teoria envolvida.

No Capítulo 1 estuda-se, de forma geral, o operador Laplaciano em Variedades Riemannianas para funções e formas diferenciais. No Capítulo 2 desenvolve-se uma breve teoria sobre o espectro de uma variedade Riemanniana e são apresentados alguns exemplos clássicos. Uma das ferramentas fortes do Capítulo 4 é a solução fundamental da equação do calor em variedades Riemannianas, que é dada no Capítulo 3. O Capítulo 4 ocupa-se do problema de isoespectralidade.

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo I: O Laplaciano em Variedades Riemannianas	
Introdução	1
Hessiano sobre Variedades Riemannianas	1
Divergência de Campos de Vetores	3
O Laplaciano (para funções) sobre uma Variedade Riemanniana	7
O Laplaciano na Esfera	12
O Laplaciano em Coordenadas Radiais (exponenciais)	14
O Laplaciano para Formas Diferenciais	22
Capítulo II: Espectro de uma Variedade Riemanniana	
Introdução	31
Problema de Autovalores sobre uma Variedade Riemanniana	33
Espectro de uma Variedade Riemanniana	42
Produtos	44
Espectro do Toro Plano	49
Espectro da Garrafa de Klein Plana	56
Espectro da Esfera	59
Espectro dos Espaços Projetivos Reais	63
Espectro dos Espaços Projetivos Complexos	64

Capítulo III: Solução Fundamental da Equação do Calor em Variedades Riemannianas

Introdução	66
Solução Fundamental da Equação do Calor (SFEC)	66
Unicidade da SFEC em Variedades Riemannianas	68
Existência da SFEC em Variedades Riemannianas	70
Desenvolvimento Assintótico da SFEC	79
Função de Partição	80

Capítulo IV: Variedades Riemannianas Isoespectrais

Introdução	84
Uma Condição de Quase Conjugação	85
Isoespectralidade	93
Construção de Variedades Isoespectrais	98
Domínios Planos Isoespectrais não Isométricos	108

Referências:	115
---------------------------	-----

CAPÍTULO 1

O LAPLACIANO EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana, com vistas a introduzir o operador Laplaciano para funções e k -formas diferenciais em variedades Riemannianas. Todas as variedades Riemannianas são, conexas e completas; também os campos de vetores, formas, funções diferenciáveis são considerados no sentido C^∞ .

Adota-se as definições, símbolos e resultados de Geometria Riemanniana dados em Do Carmo [DC], e em Berger-Gauduchon-Mazet [B-G-M]. A referência para formas, tensores e integração em variedades é Abraham-Marsden-Ratiu [A-M-R].

O HESSIANO EM VARIEDADES

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com conexão Riemanniana ∇ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável etc. Se X, Y são dois campos de vetores diferenciáveis sobre M , a derivada covariante da 1-forma df , aplicada a X e Y ,

$$\nabla df(X, Y) \quad (1)$$

é a 1-forma $\nabla_X(df)$ avaliada sobre o campo de vetores Y (*).

1.1 DEFINIÇÃO: A função \mathbb{R} - bilinear ∇df é chamada HESSIANO de f e também é denotada por $\text{Hess } f$.

Observe-se que a partir da definição de derivada covariante para r-tensores tem-se

$$[\nabla_X(df)](Y) = X \cdot (df(Y)) - df(\nabla_X Y) \quad (2)$$

em cada ponto p de M . É consequência da definição da derivada covariante para tensores que $[\nabla_{X_p}(df)](Y)$ só depende de X_p e Y_p .

1.2 PROPOSIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, X e Y campos em M então

- (a) $\text{Hess } f(X, Y)(p)$ só depende de X_p e Y_p ,
- (b) $\text{Hess } f(X, Y) = \text{Hess } f(Y, X)$ (Simetria).

PROVA:

- (a) Segue diretamente de (2).
- (b) Sob hipótese e por (2) tem-se

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(X, Y) &= X \cdot (df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X \cdot (df(Y)) - df([X, Y]) - df(\nabla_Y X) \end{aligned}$$

e como $df([X, Y]) = X \cdot df(Y) - Y \cdot df(X)$,

$$\text{Hess } f(X, Y) = Y \cdot df(X) - df(\nabla_Y X) = \text{Hess } f(Y, X).$$

(*) Para lembrar a definição de derivada covariante de tensores, ver por exemplo: Abraham-Marsden-Ratiu [A-M-R] pag. 294-295 ou Boothby [BY], pag. 391-395.

DIVERGÊNCIA DE UM CAMPO DE VETORES

1.3 DEFINIÇÃO: Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, X um campo de vetores sobre M e $\alpha \in \Omega^k(M)$ ^(*)

O PRODUTO INTERIOR de X com α , denotado por $X \lrcorner \alpha$ ou $i_X(\alpha)$ é a $(k-1)$ -forma:

$$(X \lrcorner \alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

para todo X_1, \dots, X_{k-1} campos de vetores sobre M .

1.4 DEFINIÇÃO: Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, orientável e W a forma de volume correspondente a uma orientação. Se X é um campo de vetores sobre M , a DIVERGÊNCIA de X , denotado por $\text{div} X$, é a função definida pela identidade

$$\text{div} X \cdot W = d(X \lrcorner W)$$

onde d indica derivada exterior.

Verifica-se que $\text{div} X$ não depende da forma de volume escolhida, pela fórmula de mudança de variáveis.

Considere (M, g) uma variedade Riemanniana, $m \in M$ e (x_i) uma carta local. A forma de volume local associada a (x_i) é dada por:

$$W = \theta dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3)$$

onde $\theta = [\det g_{ij}]^{1/2}$.

Se $(\partial/\partial x_i)$ é a base associada a carta (x_i) tem-se que para todo campo X sobre M , $X \lrcorner W$ é dado localmente por:

^(*) $\Omega^k(M) = \Gamma^\infty(\Lambda^k(M))$ denota as k -formas diferenciáveis, onde $\Lambda^k(M)$ é o fibrado das k -formas alternadas sobre M ver, por exemplo, [A-M-R] pag. 352.

$$X \rfloor W = \sum_{i=1}^n \alpha_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

portanto

$$(X \rfloor W) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \alpha_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n}.$$

Daí, se

$$X = \sum_{k=1}^n x^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_{1 \dots (i-1)(i+1) \dots n} &= W \left(X, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} W \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}, X, \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^n x^k W \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \\ &= (-1)^{i-1} x^i \theta. \end{aligned}$$

Logo (indica que o termo foi tirado):

$$X \rfloor W = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\theta x^i) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (4)$$

o que dá uma forma local do produto interior $X \rfloor W$.

1.5 PROPOSIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então para toda $f \in C^\infty(M)$ e todo X campo de vetores sobre M , tem-se

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + df(X).$$

PROVA

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(fX) \cdot W &= d[(fX) \lrcorner W] \\
 &= d[(f \wedge (X \lrcorner W))] \\
 &= df \wedge (X \lrcorner W) + (-1)^0 f \wedge d(X \lrcorner W) \\
 &= f d(X \lrcorner W) + df \wedge (X \lrcorner W)
 \end{aligned}$$

usando (4) tem-se (em cada ponto de M)

$$\begin{aligned}
 df \wedge (X \lrcorner W) &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\theta x^i) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} (\theta x^i) dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} (\theta x^i) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^j \wedge \dots \wedge \dots \wedge dx^n \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\theta x^i) \theta^{-1} W \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j \right) \left(\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot W \\
 &= df(X) \cdot W.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(fX) \cdot W &= f d(X \lrcorner W) + df \wedge (X \lrcorner W) \\
 &= f \operatorname{div} X \cdot W + df(X) \cdot W \\
 &= [f \operatorname{div} X + df(X)] \cdot W
 \end{aligned}$$

o que mostra a proposição.

Sob as condições da proposição 1.5 tem-se

1.6 PROPOSIÇÃO:

$$\operatorname{div} X = \theta^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\theta x^i)}{\partial x_i}$$

PROVA: Usando (4) tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X \cdot W &= d(X \rfloor W) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial(\theta x^i)}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\theta x^i)}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \theta^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\theta x^i)}{\partial x_i} \cdot W,
\end{aligned}$$

o que mostra a proposição.

Considere (M, g) uma variedade Riemanniana, X, Y, Z campos de vetores sobre M , por uma aplicação direta da definição de derivada covariante para r-tensores (Ver. Boothby [BY], página 395):

$$\nabla_X(Y \rfloor Z) = (\nabla_X Y) \rfloor Z + Y \rfloor \nabla_X Z. \quad (5)$$

Se W representa a forma de volume então $\nabla_X W = 0$ pois a forma de volume é invariante por transporte paralelo. Daí

$$\nabla_X(Y \rfloor W) = (\nabla_X Y) \rfloor W \quad (6)$$

Por outro lado, considere $m \in M^n$, α uma p -forma diferencial sobre M e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico ortonormal sobre uma vizinhança U de m , então tem-se

$$d\alpha(e_1, \dots, e_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \nabla_{e_i} \alpha(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{p+1}) \quad (7)$$

Para lembrar, pode-se obter (7) comparando a definição de derivada covariante de um r-tensor covariante com a fórmula de derivada exterior de uma p -forma, ver Warner [WR], pag. 70.

Agora, se W é a forma de volume sobre U e X um campo de vetores, em virtude de (7), (6) e definição de produto interior tem-se

$$\begin{aligned} d(X \rfloor W)(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \nabla_{e_i} (X \rfloor W)(e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} [(\nabla_{e_i} X) \rfloor W](e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n W(e_1, \dots, \nabla_{e_i} X, \dots, e_n). \end{aligned}$$

1.7 PROPOSIÇÃO:

- (a) $d(X \rfloor W)(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n W(e_1, \dots, \nabla_{e_i} X, \dots, e_n).$
(b) $d(X \rfloor W)(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i).$

A parte (b) mostra que: $(div X)(m) = \text{Traço}\{u \rightarrow \nabla_u X\}(m)$ onde o traço é tomado em $T_m M$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita.

PROVA: Resta mostrar (b); pela parte (a) e o fato que

$$\nabla_{e_i} X = \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) e_j,$$

$$\begin{aligned} d(X \rfloor W)(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_j) W(e_1, \dots, e_i, e_j, e_{i+1}, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) W(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i). \end{aligned}$$

O que mostra a proposição

O LAPLACIANO

Antes de entrar no assunto lembre-se um isomorfismo que será de muita utilidade neste trabalho.

1.8 ISOMORFISMOS MUSICAIS: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana; os *ISO-MORFISMOS MUSICAIS*

$$TM \begin{array}{c} \xrightarrow{b} \\ \xleftarrow{\#} \end{array} T^*M$$

são definidos por: para todo x em TM e u em T^*M ,

$$g(x, u^\#) = u(x) \text{ e } x^b(\cdot) = g(x, \cdot).$$

Também, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável define-se gradiente de f , notado por $\text{grad } f$, por $\text{grad } f = df^\#$. Ver por exemplo [B-G-M] pag. 21 ou [A-M-R] pag. 387.

Num sistema de coordenadas (x_i) centrada no ponto p de M^n pode-se escrever uma 1-forma α como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i \tag{8}$$

e um campo de vetores X em M :

$$X = \sum_{j=1}^n \beta^j \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{9}$$

Pelo isomorfismo musical

$$\alpha(X) = g(\alpha^\#, X), \tag{10}$$

então

$$\alpha^\# = (\alpha^\#)^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (\alpha^\#)^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \dots + (\alpha^\#)^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (11)$$

substituindo-se (8), (9) e (11) em (10) tem-se

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta^i = \sum_{i,j=1}^n (\alpha^\#)^i g_{ij} \beta^j,$$

Daí, $\alpha = \alpha^\#(g_{ij})$ portanto $\alpha^\# = \alpha(g^{ij})$ onde (g^{ij}) é a matriz inversa da matriz associada à métrica g , (g_{ij}) . Logo

$$(\alpha^\#)^i = \sum_{j=1}^n g^{ji} \alpha_j \quad (12)$$

1.9 DEFINIÇÃO (LAPLACIANO): Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$ definimos o operador de *LAPLACE - BELTRANI* (ou *LAPLACIANO*) de f , notado por $\Delta^M f$, ou $\Delta^g f$, ou simplesmente Δf , por

$$\Delta f = -\operatorname{div}(df^\#) = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

No caso que $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica Riemanniana usual isto é $(g_{ij}) = I_n$ (identidade), seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\{e_i\}$ a base ortonormal natural de \mathbb{R}^n num ponto m . Então de 1.7(b) e (12) tem-se

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\operatorname{div}(df^\#) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} df^\#, e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Observe que o sinal é o oposto do usualmente encontrado na definição do Laplaciano em textos de Análise.

1.10 DEFINIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana o operador

$$\delta : \Omega^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

é definido por: $\delta\alpha = -\text{div}(\alpha^*)$ para todo α em $\Omega^1(M)$.

A definição 1.10 reduz a definição de Laplaciano de uma função f definida sobre uma variedade Riemanniana (M, g) assim

$$\Delta f = \delta df \quad (13)$$

1.11 TEOREMA: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n , ∇ sua conexão de Levi-Civita e Δ seu Laplaciano. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal sobre uma vizinhança do ponto p de M e $f \in C^\infty(M)$, então as seguintes proposições são verdadeiras:

(a) $\Delta f(p) = -\text{traço Hess}f(p),$

ou equivalentemente

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^n \nabla df(e_i(p), e_i(p)).$$

(b) $\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^n \{e_i \cdot (e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) \cdot f\}(p)$

(c) Seja (x_i) um sistema de coordenadas locais centradas no ponto p . Se $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ e $\theta = [\det(g_{ij})]^{1/2}$. Então

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) = -\left[\theta^{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \theta \frac{\partial f}{\partial x_j}) \right] (x_1, \dots, x_n).$$

(d) Sejam $\{C_1(t), \dots, C_n(t)\}$ geodésicas tais que: $C_i(0) = p$ e $C'_i(0) = e_i(p)$ para $i = 1, \dots, n$. A função Δf pode-se calcular em p pela fórmula:

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ C_i)(t).$$

PROVA: Pela definição 1.9, a proposição 1.7(b) e por 1.8 tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= -\operatorname{div}(df^\#)(p) \\
&= -\sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} df^\#, e_i)(p) \\
&= -\operatorname{traç} \operatorname{Hess} f(p)
\end{aligned}$$

o que mostra (a).

(b) Usando prop. 1.7(b), (2) e a notação de derivada de Lie:

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= -\sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(df)(e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^n \{e_i(df(e_i)) - df(\nabla_{e_i} e_i)\} \\
&= -\sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\}.
\end{aligned}$$

O que mostra (b)

(c) Sob hipótese, usando (12) e a proposição 1.6 tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_1, \dots, x_n) &= -\operatorname{div} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} (x_1, \dots, x_n) \\
&= -\theta^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\theta \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] (x_1, \dots, x_n) \\
&= -\theta^{-1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \left(g^{ij} \theta \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} (x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Isto prova (c).

(d) Pode-se achar um referencial local $r_1(t), \dots, r_n(t)$ pelo transporte paralelo de $r_1(p), \dots, r_n(p)$ ao longo das geodésicas de p . Em particular pode-se escolher r_i tal que $r_i(t) = C_i'(t)$.

Como

$$r_i \dot{f}(p) = df(r_i) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ C_i)(t)$$

e

$$\nabla_{r_i} r_i = \nabla_{\dot{C}_i} \dot{C}_i \Big|_{t=0} = 0.$$

Logo, de (b) tem-se

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= -\sum_{i=1}^n \{r_i(r_i f) - (\nabla_{r_i} r_i) f\}(p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ C_i)(t).\end{aligned}$$

o que mostra (d).

1.12 EXEMPLO (O LAPLACIANO NA ESFERA): Considere a \mathbb{R}^{n+1} munido da métrica Riemanniana usual, $g_{ij} = \delta_{ij}$, denotada por g_0 , e S^n mergulhada em \mathbb{R}^{n+1} . Denota-se também por g_0 a métrica Riemanniana que esta induz sobre S^n . Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f) \Big|_{S^{n+1}} = \Delta^{S^n} (f \Big|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{S^n} - n \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{S^n}.$$

onde r é a coordenada radial de S^n .

PROVA: Na demonstração identificam-se os elementos que se relacionam via o isomorfismo canônico de \mathbb{R}^{n+1} com $T_p \mathbb{R}^{n+1}$. Também identifica-se o espaço tangente a S^n e o subespaço de \mathbb{R}^{n+1} correspondente.

Um ponto $p \in S^n$ determina um vetor unitário $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, e então pode-se completar uma base ortonormal $\{x, x_i\}_{i=2, \dots, n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} , obtendo-se uma base ortonormal $\{x_i\}_{i=2, \dots, n+1}$ de $T_p S^n$.

A geodésica γ_i sobre (S^n, g_0) determinada por x_i escreve-se

$$\gamma_i : \alpha \longrightarrow (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)x_i$$

para $i = 2, \dots, n+1$ (onde x e x_i são considerados como pontos de \mathbb{R}^{n+1} e $\gamma(\alpha)$ como um ponto de S^n).

A aplicação f pode-se derivar parcialmente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{i=1,2,\dots,n+1}$$

correspondente à base de \mathbb{R}^{n+1} , $\{x = x_1, x_i\}_{i=2, \dots, n+1}$.

Justamente com esta notação a derivada primeira, com respeito a α , de $f \circ \gamma_i$ escreve-se no ponto $\gamma_i(\alpha)$:

$$\frac{d(f \circ \gamma_i)}{d\alpha} = -\operatorname{sen}\alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \operatorname{cos}\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e a derivada segunda, no ponto $p = \gamma_i(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{d\alpha^2}(0) &= \left[-(\operatorname{cos}\alpha) \frac{\partial f}{\partial x_1} - (\operatorname{sen}\alpha) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - (\operatorname{sen}\alpha) \frac{\partial f}{\partial x_i} + (\operatorname{cos}\alpha) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right](0) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.11(d):

$$\begin{aligned} \Delta^{S^n}(f|_{S^n})(p) &= -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{d^2}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} (f \circ \gamma_i)(\alpha) \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) \right] \\ &= n \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\Delta^{R^{n+1}} f)(p) &= -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p) \\ &= \Delta^{S^n}(f|_{S^n})(p) - n \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) \end{aligned}$$

Portanto:

$$(\Delta^{R^{n+1}} f)|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Big|_{S^n} - n \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{S^n}$$

o que mostra o exemplo com $r = x = x_1$.

O LAPLACIANO EM COORDENADAS RADIAIS

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e considere o seguinte caso particular: seja f uma função definida sobre a bola $B(m, \varepsilon)$ de centro m e raio $\varepsilon > 0$, onde a função exponencial é um difeomorfismo (ver Do Carmo [DC], pag. 72), f dependendo da distância a m somente; mais precisamente, f é a composta da função “distância a m ” e uma função diferenciável φ definida sobre $[0, r)$ a valores em \mathbb{R} , isto é,

$$f = \varphi \circ d(m, \cdot) \quad (14)$$

Defina-se a função θ satisfazendo a forma de volume segundo Lebesgue:

$$V_{exp_g^*} = \theta V_{Lebesgue} \quad (15)$$

onde $V_{Lebesgue}$ é a forma de volume usual em \mathbb{R}^n e $V_{exp_g^*}$ é a forma de volume em $T_m M$ dada pelo “*pall-back*” de g pela exponencial, que é igual à função θ dada pela forma de volume, ver (3). Denotando por r a distância de m a n e se a função θ possui uma derivada parcial com respeito a r , no ponto m ; denota-se por θ' a derivada parcial $\frac{\partial \theta}{\partial r}$. Sob estas hipóteses.

1.13 TEOREMA

$$\Delta f = -\frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{d\varphi}{dr} \left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r} \right)$$

em todo ponto de $B(m, \varepsilon)$, a exceção de m .

PROVA: Seja p um ponto de $B(m, \varepsilon)$, então existe uma única geodésica γ , parametrizada pelo comprimento de arco s , que liga m com p . Seja y_1 o vetor tangente a γ em p então temos por definição

$$\begin{cases} p = \gamma(r) \\ y_1 = \frac{d\gamma}{ds}(r) \end{cases} \quad (16)$$

Em $T_p M$, y_1 é completado por y_2, \dots, y_n a uma base ortonormal. Os vetores y_2, \dots, y_n determinam $n - 1$ geodésicas saindo de p , que se denotam por γ_i , $i = 2, \dots, n$, parametrizadas por seu comprimento de arco α .

Pelo Teorema 1.11 (d) tem-se

$$\Delta f(p) = -\frac{d^2}{ds^2}(f \circ \gamma)(r) - \sum_{i=2}^n \frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ \gamma_i)(0). \quad (17)$$

O primeiro termo do segundo membro de (17) é igual a:

$$-\frac{d^2}{ds^2}\varphi(r) \quad (18)$$

Resta calcular

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}(f \circ \gamma_i)(0) \quad (19)$$

Como cada y_i , $i = 2, \dots, n$ é normal em p a γ , pode-se realizar como vetor tansverso a uma família de geodésicas saindo de m , parametrizadas por α . Isto é uma família $\{C_\alpha\}$ com $C_0 = \gamma$ e $C_\alpha : [0, \ell_\alpha] \rightarrow M$ para cada α ($\ell_\alpha = \ell(C_\alpha)$, o comprimento de C_α); e como $r = \ell(\gamma)$ deve-se ter para algum $\delta > 0$ que

$$C : [0, r] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$$

$$(s, \alpha) \rightarrow C_\alpha(s)$$

é uma variação de γ . Agora tem-se

$$(f \circ \gamma_i)(\alpha) = \varphi \circ d(m, \gamma_i(\alpha)) = \varphi(\ell(C_\alpha)). \quad (20)$$

Portanto

$$\frac{d^2(f \circ \gamma_i)(0)}{d\alpha^2} = \frac{d^2\varphi(r)}{ds^2} \left[\frac{d}{d\alpha} \ell(C_\alpha)(0) \right]^2 + \frac{d\varphi(r)}{ds} \frac{d^2}{d\alpha^2} [\ell(C_\alpha)](0). \quad (21)$$

Pela fórmula da primeira variação (Berger – Gauduchon – Mazet [B-G-M], pag. 44–46) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} [\ell(C_\alpha)](0) &= \left[g\left(\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}, \dot{\gamma}\right) \right]_0^r - \int_0^r g\left(\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\right) ds \\ &= \left[g\left(\left(\frac{\partial C}{\partial \alpha}(s, 0), \dot{\gamma}\right) \right]_0^r \\ &= g(y_i, \dot{\gamma}) \end{aligned}$$

e como y_i é ortogonal a $\dot{\gamma}$ temos

$$\frac{d}{d\alpha} [\ell(C_\alpha)](0) = 0 \quad (22)$$

Quanto a

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} [\ell(C_\alpha)](0),$$

ela é dada por uma aplicação da fórmula de segunda variação (ver Berger – Gauduchon – Mazet [B-G-M], pag. 85): de fato, como C_α é uma variação da geodésica γ tal que para todo α , $C_\alpha(\cdot) = C(\cdot, \alpha)$ são geodésicas então:

$$Y_i(s) = \frac{\partial C(s, 0)}{\partial \alpha}, \quad Y_i(r) = y_i, \quad Y_i(0) = 0 \quad (23)$$

é um campo de Jacobi ao longo de γ (ver, por exemplo Berger – Gauduchon – Mazet [B-G-M], pag. 88). Pela fórmula da segunda variação (Berger – Gauduchon – Mazet

[B-G-M], pág 85) tem-se

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\ell(C_\alpha)](0) = \int_0^r [|\nabla_{\dot{\gamma}} Y_i|^2 - \sigma(\dot{\gamma}, Y_i) - g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} Y_i)^2] ds. \quad (24)$$

Como Y_i é um campo de Jacobi ao longo de γ ,

$$Y_i'' + R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma} = 0, \quad (25)$$

onde $Y_i' = \nabla_{\dot{\gamma}} Y_i$, $Y_i'' = \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y_i$. Usando (25)

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_i, Y_i') &= g(Y_i', Y_i') + g(Y_i, Y_i'') \\ &= g(Y_i', Y_i') - g(Y_i, R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}) \\ &= |\nabla_{\dot{\gamma}} Y_i|^2 - \sigma(\dot{\gamma}, Y_i). \end{aligned} \quad (26)$$

De (26), segue-se

$$\begin{aligned} \int_0^r [|\nabla_{\dot{\gamma}} Y_i|^2 - \sigma(\dot{\gamma}, Y_i)] ds &= \int_0^r \nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_i, Y_i') ds \\ &= g(Y_i, Y_i') \Big|_0^r \\ &= g(Y_i(r), Y_i'(r)). \end{aligned} \quad (27)$$

Agora, mostra-se que

$$g(\dot{\gamma}, Y_i') = 0 \quad (\alpha = 0) \quad (28)$$

De fato: sobre $\alpha = 0$ tem-se

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}g(\dot{\gamma}, Y_i') &= g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, Y_i') + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}Y_i') \\ &= g(\dot{\gamma}, Y_i'') \\ &= -g(R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\end{aligned}$$

e como $g(R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -g(R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ (ver por exemplo Do Carmo [14], pag. 91) tem-se

$$\nabla_{\dot{\gamma}}g(\dot{\gamma}, Y_i') = 0 \quad (\alpha = 0)$$

O que mostra que $g(\dot{\gamma}, Y_i')$ é uma constante ao longo de $\dot{\gamma}$. Como a conexão de Levi-Civita é compatível com a métrica,

$$g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}Y_i) = \dot{\gamma} \cdot g(\dot{\gamma}, Y_i) - g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, Y_i)$$

Isto mostra que $g(\dot{\gamma}, Y_i')(r) = 0$ e portanto $g(\dot{\gamma}, Y_i') = 0$ ao longo de γ . Substituindo (28) e (27) em (24) tem-se

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}[\ell(C_\alpha)](0) = g(Y_i(r), Y_i'(r)). \quad (29)$$

Substituindo (22) e (29) em (21); e logo este valor e (18) em (17) para obter

$$\Delta f(p) = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \cdot \sum_{i=2}^n g(Y_i(r), Y_i'), \quad (30)$$

onde Y_i é o campo de Jacobi ao longo de γ para a família de geodésicas C_α com as condições

$$Y_i(0) = 0, \quad Y_i(r) = y_i.$$

O propósito agora é tentar calcular

$$\sum_{i=2}^n g(Y_i(r), Y_i'(r))$$

em função de θ e suas derivadas. A função θ é determinada pela função exponencial em m , e então θ^{-1} será determinada por $(\exp_m)^{-1}$. Daí

$$\theta^{-1}(p) = |T^{-1}(\exp_m)_p(y_1) \wedge \dots \wedge T^{-1}(\exp_m)_p(y_n)|. \quad (31)$$

Como a função exponencial é radialmente uma isometria (Do Carmo [DC], Lema de Gauss, pag. 69) tem-se

$$\theta^{-1}(p) = |T^{-1}(\exp_m)_p(y_2) \wedge \dots \wedge T^{-1}(\exp_m)_p(y_n)|. \quad (32)$$

Ponha $q = \gamma(s)$ (sobre γ) tem-se

$$\theta^{-1}(q) = \frac{T^{-1}(\exp_m)_p(Y_2(s)) \wedge \dots \wedge T^{-1}(\exp_m)_p(Y_n(s))}{|Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)|} \quad (33)$$

(o campo de Jacobi definido por y_1 , é igual a $\dot{\gamma}$ e não produz nenhuma alteração aos produtos em (31) e (32)).

Portanto, em $T_m M$, o campo $T^{-1}(\exp_m)_q(Y_i(s))$ é realizado como vetores transversais da família de geodésicas $\{(\exp_m)_p^{-1}(C_\alpha)\}$, que são aproximados (em primeira ordem) pelos segmentos que unem, em $T_m M$, os pontos 0_m e

$$r\dot{\gamma}(0) + \frac{\alpha}{|T^{-1}(\exp_m)_p(y_i)|} T^{-1}(\exp_m)_p(y_i)$$

Daí,

$$T^{-1}(\exp_m)_q(Y_i(s)) = \frac{s}{r} T^{-1}(\exp_m)_p(y_i) \quad (34)$$

e então, substituindo (34) em (33),

$$\theta^{-1}(q) = \frac{s^{n-1}}{r^{n-1}} \frac{|T^{-1}(\exp_m)_p(y_2) \wedge \dots \wedge T^{-1}(\exp_m)_p(y_n)|}{|Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)|}, \quad (35)$$

e finalmente

$$\theta(q) = \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} |Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)| \cdot \theta(p). \quad (36)$$

Agora derivamos θ . Com respeito a s e, para facilitar os cálculos, seja $A(s) = Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)$; daí

$$[A(s)]^2 = \det[g(Y_i(s), Y_j(s))], \quad i, j = 2, \dots, n \quad (37)$$

Tomando a derivada covariante em (37) ao longo de γ e fazendo $A'(s) = \nabla_{\dot{\gamma}} A(s)$:

$$2A(s)A'(s) = \sum_{k=2}^n A_{k-1}(s) \quad (38)$$

onde $A_k(s)$ é o determinante obtido ao se derivar a k -ésima fila da matriz $[g(Y_i(s), Y_j(s))]$. Então (omitindo a letra s) tem-se

$$A_{k-1} = \det \begin{bmatrix} g(Y_2, Y_2) & \dots & g(Y_2, Y_k) & \dots & g(Y_2, Y_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_k, Y_2) & \dots & 2g(Y'_k, Y_k) & \dots & \nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_k, Y_m) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g(Y_n, Y_2) & \dots & g(Y_n, Y_k) & \dots & g(Y_n, Y_n) \end{bmatrix}$$

de onde temos:

$$A_{k-1}(r) = \det \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ (\nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_k, Y_2))(r) & \cdots & 2g(Y'_k(r), Y_k(r)) & \cdots & (\nabla_{\dot{\gamma}} g(Y_k, Y_n))(r) \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

onde as únicas entradas diferentes de zero (possivelmente) são as que estão na diagonal e na k -ésima fila. Portanto,

$$A_{k-1}(r) = 2g(Y'_k(r), Y_k(r)). \quad (39)$$

Como $A(r) = 1$ e substituindo (39) em (38) no caso $s = r$ tem-se

$$A'(r) = \sum_{k=2}^n g(Y'_k(r), Y_k(r)). \quad (40)$$

Isto é, a derivada, com respeito a s , do determinante $|Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)|$ no ponto $s = r$ e igual a $\sum_{k=2}^n g(Y'_k(r), Y_k(r))$. Derivando (36) em $s = r$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial s}(p) &= \frac{D}{ds} \left[\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} |Y_2(s) \wedge \dots \wedge Y_n(s)| \cdot \theta(p) \right]_{s=r} \\ &= -\frac{n-1}{r} \cdot \theta(p) + \left[\sum_{k=2}^n g(Y_k(r), Y'_k(r)) \right] \theta(p) \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{k=1}^n g(Y_k(r), Y'_k(r)) = \frac{\theta'}{\theta}(p) + \frac{n-1}{r} \quad (41)$$

substituindo (41) em (30) obtém-se

$$\Delta f(p) = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}(r) - \frac{d\varphi}{ds}(r) \cdot \left[\frac{\theta'}{\theta}(p) + \frac{n-1}{r} \right].$$

o que mostra o Teorema.

LAPLACIANO PARA FORMAS DIFERENCIAIS

Primeiro, apresenta-se o operador estrela de Hodge e alguns resultados necessários para estender a definição do Laplaciano de funções a formas diferenciais.

1.14 PROPOSIÇÃO: Seja E um espaço vetorial de dimensão n , orientado, com um produto interno $g = \langle, \rangle$.

Seja ω o correspondente elemento volume de E . Então

(a) Existe um único isomorfismo $*$: $\wedge^k(E) \rightarrow \wedge^{n-k}(E)$ satisfazendo

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega, \text{ para } \alpha, \beta \in \wedge^k(E).$$

(b) Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de E positivamente orientada de E e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é sua base dual, então

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}) = \text{sig}(\sigma) e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}$$

onde $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$ e σ uma permutação de $1, 2, \dots, n$.

PROVA: Primeiro, prova-se a unicidade. Suponha que $*$ satisfaz a equação dada em (a) e sejam

$$\beta = e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}, \quad \alpha = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

vetores base ortonormais de $\Lambda^k(E)$, $i_1 < \dots < i_k$ (lembre-se que o produto interior \langle, \rangle de E pode-se estender a E^* de tal maneira que $\{e^1, \dots, e^n\}$ seja uma base ortonormal de E^* ; da mesma forma tal produto interior estende-se de maneira natural a $\Lambda^k(E)$ e aos produtos tensoriais). Então por (a) $\alpha \wedge * \beta = 0$ a menos que $(i_1, \dots, i_k) = (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$. Desta forma

$$* \beta = a e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}$$

para uma constante a . Mas

$$\beta \wedge * \beta = a(\text{sig} \sigma) \omega$$

e como $\langle \beta, \beta \rangle = 1$ tem-se $a = \text{sig} \sigma \cdot E$ portanto $*$ satisfaz (b). Isto é, $*$ é única.

Para mostrar a existência, defina $*$ como em (b), lembrando que $e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}$ para $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ forma uma base ortonormal de $\Lambda^k(E)$. Daí tem-se imediatamente que a equação dada em (a) desta proposição é verificada usando esta base. É claro que $*$ definida por (b) é um isomorfismo, pois envia as bases ortonormais de $\Lambda^k(E)$ em bases ortonormais de $\Lambda^{n-k}(E)$.

O isomorfismo $*$: $\Lambda^k(E) \rightarrow \Lambda^{n-k}(E)$ desta proposição é chamado o *OPERADOR ESTRELA DE HODGE*. Algumas propriedades básicas são dadas na seguinte

1.15 PROPOSIÇÃO: Seja E um espaço vetorial de dimensão n , orientado, com produto interno \langle, \rangle e ω a forma de volume associada. Então o operador estrela de Hodge satisfaz as seguintes propriedades: para α, β em $\Lambda^k(E)$

$$(a) \quad \alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \omega,$$

$$(b) \quad ** \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha$$

$$(c) \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle * \alpha, * \beta \rangle$$

(d) Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e^1, \dots, e^n\}$ são bases duais ortonormais de E e E^* respectivamente, então

$$*(e^j \wedge \alpha) = (-1)^k e_j \rfloor * \alpha$$

PROVA:

(a) Sejam α, β em $\Lambda^k(E)$. Usando 1.15(a) tem-se

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega = \langle \beta, \alpha \rangle \omega = \beta \wedge * \alpha$$

onde ω é a forma de volume.

(b) É suficiente trabalhar numa base. De fato, seja $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$. Por 1.15(a)

$$*(e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}) = b e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$$

para alguma constante b . Para encontrar b usa-se 1.15(a) com $\alpha = \beta = e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}$ para obter

$$b e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \wedge e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)} = \omega.$$

Logo:

$$b = (-1)^{k(n-k)} \text{sig} \sigma$$

Pela equação dada em 1.15(b)

$$\begin{aligned} ** e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)} &= \text{sig} \sigma * (e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)}) \\ &= (\text{sig} \sigma)^2 (-1)^{k(n-k)} e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)} \end{aligned}$$

isto mostra (b).

(c) Usando (a) e (b) desta proposição

$$\begin{aligned} \langle * \alpha, * \beta \rangle \omega &= * \alpha \wedge ** \beta = (-1)^{k(n-k)} * \alpha \wedge \beta \\ &= \beta \wedge * \alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \omega \end{aligned}$$

(d) Basta considerar $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$

(i) Se j está em $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ então $*(e^j \wedge \alpha) = 0$ e também $e_j \lrcorner \alpha = 0$.

(ii) Se j não está em $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ então existe $p \in \{k+1, \dots, n\}$ tais que $\sigma(p) = j$
logo

$$\begin{aligned} *(e^j \wedge \alpha) &= (-1)^k * (e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)} \wedge e^{\sigma(p)}) \\ &= (-1)^k (\text{sig } \sigma) e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge \widehat{e^{\sigma(p)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \\ &= (-1)^k e_j \lrcorner * \alpha. \end{aligned}$$

1.16 OBSERVAÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n . Se TM é o fibrado tangente de M então o operador estrela de Hodge estende-se de maneira natural a M como o isomorfismo isométrico

$$* : \Lambda^k(TM) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(TM)$$

dado por: para cada $m \in M$

$$* : \Lambda^k(T_m M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(T_m M)$$

é o isomorfismo dado pelo operador estrela de Hodge que pela proposição 1.15(c) é uma isometria. Também temos um operador sobre as formas diferenciais

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M),$$

definido pontualmente $(*\omega)(p) = *(\omega(p))$, onde $\omega \in \Omega^k(M)$.

Cada variedade é localmente orientável, com exatamente duas escolhas de orientação local. Portanto, localmente, uma variedade Riemanniana tem dois operadores estrela, um para cada escolha de orientação local. Um operador estrela local pode ser estendido a um operador estrela global se e só se M é orientável.

1.17 PROPOSIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada. Então

(a) O operador estrela de Hodge e os isomorfismos musicais são paralelos.

(b) Para p em M e $\{e_j\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ tem-se

$$*\nabla_{e_j}\alpha = \nabla_{e_j}*\alpha$$

para todo α em $\Omega^k(M)$.

PROVA:

(a) Seja e^i uma 1-forma paralela ao longo de uma curva γ em M , $i = 1, 2, \dots, n$ tais que $\{e^i|_0\}$ seja uma base ortonormal orientada para $T_{\gamma(0)}^*M$.

Seja $\alpha = e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$, σ uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ como a forma de volume ao longo de γ é paralela então $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\alpha \wedge *\alpha) = 0$, e portanto $*\alpha$ é paralela. Isto é $*$, é paralelo ao longo de γ .

A prova para o isomorfismo musical é similar

(b) Basta supor que $\alpha = fe^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)}$ em $\Omega^k(M)$ onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Pela regra de Leibnitz e a parte (a) desta proposição:

$$\begin{aligned} *\nabla_{e_j}\alpha &= *[(\nabla_{e_j}f) \wedge e^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(k)} + 0] \\ &= (sig\sigma)df(e_j)e^{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e^{\sigma(n)} \\ &= \nabla_{e_j}*\alpha. \end{aligned}$$

1.18 DEFINIÇÃO: Seja ∇ a conexão de Levi-Civita sobre uma variedade Riemanniana (M, g)

(a) A *Divergência* de uma função, C^∞ , sobre M é definida como zero.

(b) A *Divergência* de um s -tensor covariante Z sobre M , $s > 0$, é o $(s-1)$ -tensor covariante, $\text{div } Z$, sobre M tal que em $p \in M$,

$$(\text{div } Z)_p = \sum_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i} Z$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal para $T_p M$. Ou simplesmente para $v_1, \dots, v_{s-1} \in T_p M$

$$(\text{div } Z)_p(v_1, \dots, v_{s-1}) = \sum_i (\nabla_{e_i} Z)(e_i, v_1, \dots, v_{s-1}).$$

Não é difícil verificar que $\text{div} Z$ está bem definida.

Lembre-se que dado um campo vetorial, X , sobre M , $X^b \in \Omega^1(M)$ e é definida por $X^b(Y) = \langle X, Y \rangle$, Y é um campo vetorial sobre M . Usando uma base ortonormal $\{e_j\}$ para $T_p M$, pelo fato que o isomorfismo musical é paralelo (1.17 (a)), temos

$$\begin{aligned} (\text{div} X)_p &= \sum_j \langle \nabla_{e_j} X, e_j \rangle = \sum_j (\nabla_{e_j} X)^b(e_j) \\ &= \sum_j e_j \lceil (\nabla_{e_j} X)^b = \sum_j e_j \lceil \nabla_{e_j} X^b \\ &= (\text{div} X^b)_p. \end{aligned}$$

O operador div dado em 1.18 sobre o espaço dos r -tensores covariantes sobre uma variedade Riemanniana (M, g) envia o espaço $\Omega^r M$ das r -formas diferenciáveis ao espaço $\Omega^{r-1} M$, a restrição de div a $\Omega M = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k M$ é tão importante que merece um símbolo especial.

1.19 DEFINIÇÃO: Defina

$$\delta \alpha = -\text{div} \alpha \text{ para } \alpha \in \Omega^k M.$$

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta e orientável, então a integral sobre M de uma função contínua está bem definida. Em particular, se α, β são k -formas diferenciais sobre M , então a função $\langle \alpha, \beta \rangle = g(\alpha, \beta) = *(\alpha \wedge *\beta)$ pode ser integrada sobre M ; isto define um produto interno $\int_M \langle \alpha, \beta \rangle$ sobre o espaço vetorial real $\Omega^k(M)$, denotado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle_0 = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (42)$$

Também, se $\{e_j\}$ é um referencial geodésico ortonormal sobre uma vizinhança U de um ponto $p \in M$ e e^j é o referencial geodésico dual de e_j então por (7), para todo $\alpha \in \Omega^r(M)$

$$\begin{aligned} d\alpha(e_0, \dots, e_r) &= \sum_j (-1)^j (\nabla_{e_j} \alpha)(e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_r)(p) \\ &= \sum_j (-1)^j \sum_i e^i(e_j) (\nabla_{e_i} \alpha)(e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_r)(p) \\ &= \sum_i \sum_j (-1)^j e^i(e_j) \cdot (\nabla_{e_i} \alpha)(e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_r)(p) \end{aligned}$$

E pela definição do produto exterior

$$d\alpha(e_0, \dots, e_r) = \sum_i (e^i \wedge \nabla_{e_i} \alpha)(e_0, \dots, e_r)(p). \quad (43)$$

1.20 PROPOSIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então

(a) $\delta\alpha = (-1)^{n(k+1)+1} * d * \alpha$, $\alpha \in \Omega^k(M)$ onde $*$ é o operador estrela local de Hodge de uma orientação local de M . Como consequência $\delta^2 = 0$.

(b) Se M é compacta e orientável, então $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ é o adjunto de $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ com respeito ao produto interno dado em (42).

PROVA:

(a) Fixe $p \in M$ e bases ortonormais duas e_i e e^j para $T_p M$ e $T_p^* M$. Usando 1.15(b) e (d), 1.17(b) e (43) tem-se

$$\begin{aligned} -(div\alpha)_p &= -\sum_j e_j \lrcorner \nabla_{e_j} \alpha \\ &= -\sum_j (-1)^{k(n-k)} e_j \lrcorner * (\nabla_{e_j} \alpha) \\ &= -\sum_j (-1)^{k(n-k)} (-1)^{n-k} * [e^j \wedge \nabla_{e_j} \alpha] \\ &= (-1)^{n(k+1)+1} * \sum_j e^j \wedge \nabla_{e_j} * \alpha \\ &= (-1)^{n(k+1)+1} (*d * \alpha)_p \end{aligned}$$

(b) Escolha uma orientação, com elemento de volume Riemanniano ω e operador estrela de Hodge $*$. Dado α em $\Omega^{k-1}(M)$ e β em $\Omega^k(M)$. Por 1.15(a), Teorema de Stokes, 1.16(b) e a parte (a) desta proposição:

$$\int_M \langle d\alpha, \beta \rangle = \int_M \langle d\alpha, \beta \rangle \omega = \int_M d\alpha \wedge * \beta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M [d(\alpha \wedge * \beta) + (-1)^k \alpha \wedge d * \beta] \\
&= \int_M (-1)^k \alpha \wedge d * \beta \\
&= \int_M (-1)^{k+(n-k+1)(k-1)} \alpha \wedge * * d * \beta \\
&= \int_M \langle \alpha, (-1)^{n(k+1)+1} * d * \beta \rangle \omega \\
&= \int_M \langle \alpha, (-1)^{n(k+1)+1} * d * \beta \rangle \\
&= \int_M \langle \alpha, \delta \beta \rangle
\end{aligned}$$

1.21 DEFINIÇÃO: O OPERADOR LAPLACIANO PARA FORMAS DIFERENCIAIS sobre uma variedade Riemanniana compacta e orientável (M, g) é o operador diferencial de segunda ordem

$$\Delta = d\delta + \delta d \text{ sobre } \Omega^p(M),$$

que também denota-se por $\Delta^{(p)}$.

Alguns autores se referem a este operador como: OPERADOR LAPLACIANO DE HODGE-DE RHAM, também OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI, ou simplesmente LAPLACIANO, em (M, g) .

Uma k -forma diferenciável α sobre M é *harmônica* se $\Delta\alpha = 0$.

As seguintes propriedades de δ são imediatas:

- (i) $\Delta = (d + \delta)^2$ e Δ preserva o grau da forma;
- (ii) Δ comuta com $d, \delta, *$ e isometrias;
- (iii) Se M é compacta, então Δ é auto-adjunto com respeito ao produto interno induzido pela integral como em (42):

$$\langle \Delta\alpha, \beta \rangle_0 = \langle \alpha, \Delta\beta \rangle_0$$

ou simplesmente

$$\int_M \langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \int_M \langle \alpha, \Delta \beta \rangle$$

(iv) Para $f \in C^\infty(M)$, $\delta f = 0$, assim $\Delta f = \delta df$ como em (13). Ou simplesmente, por 1.19

$$\Delta f = -\operatorname{div} df = -\operatorname{div} df^\# = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

o Laplaciano pode-se estender a variedades não orientadas, mas não está no objetivo deste trabalho, (ver por exemplo [PR] Capítulo 4).

CAPÍTULO 2

ESPECTRO DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se alguns resultados básicos sobre o espectro de uma variedade Riemanniana e calcula-se o espectro do toro plano bidimensional, de esferas e dos espaços projectivos reais e complexos.

Todas as variedades Riemannianas usadas neste capítulo são conexas e compactas.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana com $\partial M \neq \emptyset$, seja $g|_{\partial M}$ a métrica Riemanniana induzida por g sobre ∂M e seja $d\sigma_g$ a medida Riemanniana sobre ∂M . Denota-se por η o vetor normal exterior unitário a ∂M . Lembre-se (ver [WR] pag. 151)

$$\int_M (\text{Div}_g X) V_g = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d\sigma_g \quad (1)$$

para qualquer campo de vetores X sobre M , $\langle X, \eta \rangle = g(X, \eta)$. Também

$$\int_M f \Delta h V_g = \int_M \langle \nabla f, \nabla h \rangle V_g - \int_{\partial M} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \eta} d\sigma_g \quad (2)$$

para qualquer $f, h \in C^\infty(M)$. A fórmula (2) chama-se PRIMEIRA FÓRMULA DE GREEN. E

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h)V_g = \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\sigma_g \quad (3)$$

para qualquer $f, h \in C^\infty(M)$. A fórmula (3) chama-se a SEGUNDA FÓRMULA DE GREEN; ver por exemplo [WR] pag. 158.

Em particular, para $f, h \in C_0^\infty(M)$ (suporte compacto em $M - \partial M$)

$$\int_M f\Delta h V_g = \int_M h\Delta f V_g : \Delta \text{ é simétrico} \quad (4)$$

$$\int_M f\Delta f V_g = \int_M \|df\|^2 V_g : \Delta \text{ é não - negativo} \quad (5)$$

PROBLEMA DE AUTOVALORES SOBRE VARIEDADES RIEMANNIANAS

Assuma, por enquanto, que a variedade Riemanniana (M, g) é fechada (isto é, compacta, conexa sem bordo). O interesse é o problema de autovalores

$$\Delta u = \lambda u, \quad u \in C^\infty(M) \quad (6)$$

Multiplicando por u e integrando sobre M tem-se

$$\int_M u\Delta u = \lambda \int_M u^2$$

usando a primeira fórmula de Green:

$$\int_M \|du\|^2 = \lambda \int_M u^2$$

Introduz-se o quociente de RAYLEIGH – RITZ

$$R(u) = \frac{\int \|du\|^2}{\int u^2} \quad (7)$$

O espaço natural para olhar isto é $H^1(M, g)$, o completado do espaço $C^\infty(M)$ para a norma $\|\cdot\|_1$, dada por

$$\|f\|_1^2 = \int_M (\|df\|^2 + f^2) dV_g. \quad (8)$$

Temos $H^1(M, g) \subseteq L^2(M, g)$ e a seguir fazemos algumas observações importantes.

2.1 OBSERVAÇÕES:

(a) A inclusão $H^1(M, g) \hookrightarrow L^2(M, V_g)$ é uma aplicação compacta; isto é envia conjuntos limitados de $H^1(M, g)$ em conjuntos relativamente compactos em $L^2(M, g)$.

Esta afirmação é uma consequência do Teorema de Ascoli (ver por exemplo, Gilbarg – Trudinger [G-T], § 7.10).

(b) Os elementos em $H^1(M, g)$ são funções em L^2 tal que (no sentido de distribuições) df também está em L^2 . Se usará a linguagem de distribuições. Tudo poderá ser feito no sentido C^∞ , usando a densidade de $C^\infty(M, g)$ em $H^1(M, g)$ e em $L^2(M, g)$.

2.2 NOTAÇÕES: Para estudar os pontos críticos de $R(u)$ sobre $H^1(M, g)$ denota-se por:

$$L = L^2(M, V_g), \quad \|u\|_0^2 = \int_M u^2 V_g, \quad \langle u, v \rangle_0 = \int_M uv V_g$$

$$\begin{aligned}
H &= H^1(M, g), \|u\|_1^2 = \int_M (\|du\|^2 + u^2) V_g \\
\langle u, u \rangle_1 &= \int_M (\langle du, dv \rangle + uv) V_g
\end{aligned}$$

E espaço vetorial, denota-se por $E^* = E - \{0\}$.

2.3 PROPOSIÇÃO: O ínfimo $\inf\{R(u) : u \in H^*\} = \lambda_H$ existe e é atingido no espaço vetorial de dimensão finita E_H de H caracterizado por

$$u \in E_H \implies \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H \int_M uv.$$

PROVA:

Claramente, $R(u) \geq 0$ para todo $u \in H^*$ e assim λ_H existe e é ≥ 0 . Por conveniência, seja $L_1 = \{u \in L : \|u\|_0 = 1\}$. Como

$$R(au) = R(u)$$

para todo $a \in \mathbb{R}^*$, existe uma seqüência $\{u_n\}$ em $H^* \cap L_1$ tal que

$$\lambda_H \leq R(u_n) \leq \lambda_H + 1/n$$

Em particular

$$\int_M \|du_n\|^2 / \|u_n\|_0 \leq \lambda_H + 1/n$$

Assim

$$\int_M \|du_n\|^2 \leq \lambda_H + 1/n.$$

$$\|u_n\|_1^2 = \int_M (\|du_n\|^2 + u_n^2) \leq \lambda_H + \frac{1}{n} + 1$$

isto é

$$\|u_n\|_1^2 \leq \lambda_H + 2, \text{ para todo } n \geq 1.$$

A seqüência $\{u_n\}$ é limitada no espaço de Hilbert, H , portanto existe uma subseqüência fracamente convergente $\{u_{1n}\}$, $u_{1n} \rightharpoonup u$ (Brezis [BS], III. 27 pag. 50).

A seqüência $\{u_{1n}\}$ é de novo limitada em H , e assim existe uma subseqüência $\{u_{2n}\}$ que é L -convergente (a inclusão $H \hookrightarrow L$ é compacta; indentifica-se um elemento em H com sua imagem em L), $u_{2n} \xrightarrow{L} v$. Como $\{u_{2n}\}$ é uma subseqüência de $\{u_{1n}\}$ também tem-se

$$u_{2n} \xrightarrow{H} u$$

Seja $i : H \hookrightarrow L$ a função inclusão, ela é contínua (pelo fato de ser compacta). Tem-se $i' : L' \longrightarrow H'$ definida por $i'(\varphi) = \varphi \circ i$ e assim, para todo $\varphi \in L'$

$$i'(\varphi)(u_{2n}) = \varphi(i(u_{2n}))$$

isto implica $\varphi(i(u_{2n})) \longrightarrow i'(\varphi)(u)$ isto é $u_{2n} \xrightarrow{L} u$ (Brezis [BS], prop III.5 pag. 35).

Como convergência forte implica convergência fraca tem-se $u_{2n} \xrightarrow{L} v$ e assim $u = v$. Finalmente encontra-se uma seqüência $\{u_n\}$ em $H \cap L_1$ tal que

$$\begin{aligned} R(u_n) &\longrightarrow \lambda_H, \\ u_n &\xrightarrow{H} u, \\ u_n &\xrightarrow{L} u \Rightarrow \|u\|_0 = 1. \end{aligned}$$

Para todo $f \in H$:

$$|\langle u_n, f \rangle_1| \leq \|u_n\|_1 \|f\|_1 \leq (\lambda_H + 1 + 1/n)^{1/2} \|f\|_1$$

e assim

$$|\langle u, f \rangle_1| \leq (\lambda_H + 1)^{1/2} \|f\|_1$$

Como $u \in H$,

$$\|u\|_1^2 \leq (\lambda_H + 1)^{1/2} \|u\|_1, \text{ isto é, } R(u) \leq \lambda_H$$

o que implica que $R(u) = \lambda_H$. Seja

$$E_H = \{0\} \cup \{u \in H^* : R(u) = \lambda_H\}$$

Para $u \in E_H, v \in H$ e t suficientemente pequeno tem-se que $u + tv \neq 0$ e assim $R(u + tv) \geq \lambda_H$.

Agora

$$\begin{aligned} \int_M \|d(u + tv)\|^2 &= \int_M \|du\|^2 + 2t \int_M \langle du, dv \rangle + t^2 \int_M \|dv\|^2 \\ \int_M (u + tv)^2 &= \int_M u^2 + 2t \int_M uv + t^2 \int_M v^2 \end{aligned}$$

e assim fazendo a divisão:

$$\begin{aligned} R(u + tv) &= \int_M \|d(u + tv)\|^2 / \int_M (u + tv)^2 \\ &= \lambda_H (1 + 2t [\frac{\int_M \langle du, dv \rangle}{\int_M |du|^2} - \frac{\int_M uv}{\int_M u^2}] + 0(t)) \end{aligned}$$

Da qual precisa-se

$$\int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H \int_M uv, \text{ para todo } v \in H$$

Isto mostra que E_H é um espaço vetorial fechado, para $\|\cdot\|_1$. Para $u \in E_H$, segue-se em particular

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &= \int_M \langle du, du \rangle + \int_M u^2 = \lambda_H \int_M u^2 + \int_M u^2 \\ &= (\lambda_H + 1) \|u\|_0^2 \end{aligned}$$

Assim que a bola unitária em E_H com respeito a $\|\cdot\|_0$ é limitada com respeito a $\|\cdot\|_1$ e assim relativamente compacta na topologia induzida pela $\|\cdot\|_0$, assim que E_H é de dimensão finita.

2.4 OBSERVAÇÕES:

(a) A proposição 2.3 é de fato uma proposição abstrata: não foi usado o fato que trabalha-se com funções.

(b) Para $H \subset H^1(M, g)$ e (M, g) uma variedade Riemanniana fechada, tem-se em particular

$$u \in E_H \Leftrightarrow \forall v \in C^\infty(M), \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H \int_M uv.$$

e assim pela primeira fórmula de Green:

$$\int_M u(\Delta v - \lambda_H v) = 0$$

isto é, u é solução do problema de autovalores $\Delta f = \lambda f, \lambda = \lambda_H$, no sentido de distribuições.

Agora introduz-se

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \{u \in L : \langle u, E_H \rangle_0 = 0\} = E_H^{\perp_0} \\ H^{(1)} &= \{u \in H : \langle u, E_H \rangle_1 = 0\} = E_H^{\perp_1} \end{aligned}$$

claramente, $L^{(1)}$ é um subespaço fechado de L e $H^{(1)}$ é um subespaço fechado de H ,

$$H^{(1)} \subseteq L^{(1)} \quad (\text{para } u \in E_H, \langle u, v \rangle_1 = (\lambda_H + 1)\langle u, v \rangle_0).$$

Também, pode-se aplicar a proposição 2.3 com $H^{(1)}$ e $L^{(1)}$ em vez de H e L : tem-se uma $\lambda_{H^{(1)}}$ e um espaço de dimensão finita $E_{H^{(1)}}$ caracterizado por

$$u \in E_{H^{(1)}} \Leftrightarrow \forall v \in H^{(1)}, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_{H^{(1)}} \int_M uv$$

Se $v \in E_H$, tem-se $\langle u, v \rangle_0 = 0$, pois $u \in E_{H^{(1)}} \subseteq L^{(1)}$ e assim

$$\int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H \int_M uv = 0$$

Também,

$$u \in E_{H(1)} \Leftrightarrow \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_{H(1)} \int_M uv$$

claramente, $\lambda_{H(1)} \geq \lambda_H$. Se $\lambda_{H(1)} = \lambda_H$, então

$$\begin{aligned} u \in E_{H(1)} &\Leftrightarrow \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H^{(1)} \int_M uv \\ &\Leftrightarrow \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_H \int_M uv \\ &\Leftrightarrow u \in E_H \end{aligned}$$

Logo $E_{H(1)} \subseteq E_H$ que é impossível. Isto é $\lambda_{H(1)} > \lambda_H$.

Finalmente pode-se provar:

2.5 TEOREMA: Sejam $L = L^2(M, g)$ e $H \subseteq H^1(M, g)$ um subespaço fechado com respeito à topologia induzida por $\|\cdot\|_1$, (M, g) uma variedade Riemanniana. Então

Existe uma sequência discreta $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ de números reais não negativos, e uma sequência E_1, E_2, \dots de subespaços de dimensão finita de H tais que

(a)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf\{R(u) = \int_M \|du\|^2 / \int_M u^2 : u \in H^*\} \\ E_1 &= \{0\} \cup \{u \in H^* : R(u) = \lambda_1\} \\ &= \{u \in H : \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_1 \int_M uv\} \end{aligned}$$

(b) E_k é ortogonal a $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{k-1}$ segundo $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_0$, ainda mais

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf\{R(u) : u \in H^*, \langle u, E_1 \oplus \dots \oplus E_{k-1} \rangle_1 = 0\} \\ E_k &= \{0\} \cup \{u \in H^* : \langle u, E_1 \oplus \dots \oplus E_{k-1} \rangle_1 = 0\} \\ &= \{u \in H : \forall v \in H, \int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_k \int_M uv\} \end{aligned}$$

(c) A seqüência $\{\lambda_n\}$ cresce ao infinito e L_H é a soma de Hilbert dos espaços E_n , $L_H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$, onde L_H é o fecho de H em L para a $\|\cdot\|_0$.

PROVA: Pela proposição 2.3 e as observações dadas em 2.4 resta mostrar (c). Como $\{\lambda_n\}$ é crescente, vai para o infinito ou converge a um número finito λ tal que $\lambda_n \leq \lambda$ para todo n . No último caso, seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal segundo $\|\cdot\|_0$ para

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

então,

$$\|e_i\|_1^2 = \int_M (\|de_i\|^2 + \|e_i\|^2) = \|de_i\|_0^2 + 1$$

mas $e_i \in E_j$ para algum j , e a parte (b) deste Teorema implica

$$\int_M \|de_i\|^2 = \lambda_j \int_M \|e_i\|^2 = \lambda_j \|e_i\|_0^2 = \lambda_j$$

Portanto, $\|e_i\|_1^2 = \lambda_j + 1 \leq \lambda + 1$, isto é, $\{e_i\}$ é limitada na norma $\|\cdot\|_1$ e assim tem uma subsequência convergente, o que é impossível. Logo $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots \nearrow \infty$.

Para mostrar que

$$L_H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i$$

é suficiente mostrar que o fecho E , na norma $\|\cdot\|_1$ de $\sum E_i$ em H é igual a H . Suponha que não. Isto é, existe $u \in H^*$ tais que

$$u \in \left(\overline{\sum E_i} \right)^{\perp}$$

Dai

$$\langle u, E_1 \oplus \dots \oplus E_{n-1} \rangle_1 = 0 \text{ para todo } n.$$

Pela definição de λ_n tem-se $R(u) \geq \lambda_n$ para todo n , portanto

$$\|u\|_1^2 = \|du\|_0^2 + \|u\|_0^2 = [(R(u) + 1)]\|u\|_0^2 \geq [\lambda_n + 1]\|u\|_0^2$$

o que mostra

$$\lambda_n \leq \|u\|_1^2 / \|u\|_0^2 - 1 \text{ para todo } n,$$

que é impossível.

2.6 COROLÁRIO: Sob as notações do Teorema 2.5., seja H denso em L . Denote por $\{V_i\}_{i=1,\dots}$ a seqüência não trivial de subespaço de H tais que

(a) $\forall i \geq 1, \exists r_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\forall u \in V_i, \forall v \in H, \langle u, v \rangle_1 = (r_i + 1)\langle u, v \rangle_0$$

(b) $\sum V_i$ é denso em L para $\|\cdot\|_0$.

Então, salvo reordenamento, a $\{r_i, V_i\}$ é a seqüência $\{\lambda_i, E_i\}$ dada no Teorema 2.5.

PROVA: Para $u \in V_i$ e $v \in E_j$, pode-se escrever, usando (a) e o Teorema 2.5

$$\langle u, v \rangle_1 = (r_i + 1)\langle u, v \rangle_0 = (\lambda_i + 1)\langle u, v \rangle_0$$

daí $\langle u, v \rangle_0 = 0$ ou $r_i = \lambda_i$.

Pode-se obviamente assumir que os r_i são todos diferentes, também pelo Teorema 2.5 tem-se $\langle V_i, E_j \rangle_0 = 0$ ou $V_i \subseteq E_j$. E por (b) : $\langle V_i, E_i \rangle_0 = 0$ ou $V_i = E_j$.

2.7 OBSERVAÇÕES:

(a) Como tem-se visto em 2.2 e 2.4, a proposição 2.3 e o Teorema 2.5, os resultados são do tipo geral.

(b) Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta com bordo ∂M , considere:

CASO 1. Tome $H = H_0^1(M, g)$: o fecho de $C_0^\infty(M)$ em $H^1(M, g)$ para a norma $\|\cdot\|_1$. Aplica-se a observação 2.4 (b), o Teorema 2.5 e novamente pela primeira fórmula de Green segue-se que qualquer elemento de E_k é uma solução distribucional da equação $\Delta u = \lambda_k u$ em M ; isto significa que tem-se resolvido o PROBLEMA DE AUTOVALORES DE DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \end{cases}$$

CASO 2. Tome $H = H^1(M, g)$ e seja $u \in E_k$. Então para todo $v \in C^\infty(M)$ segue-se, como no caso 1,

$$\int_M \langle du, dv \rangle = \lambda_k \int_M uv$$

e pela fórmula de Green

$$\int_M u \Delta v + \int_{\partial M} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma_g - \lambda_k \int_M uv = 0$$

onde η é o vetor unitário normal ao longo de ∂M .

Portanto, para que seja $\Delta u = \lambda_k u$ no sentido de distribuições é preciso que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \partial M,$$

isto significa que u é solução (no sentido fraco) do PROBLEMA DE AUTOVALORES DE NEUMANN:

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{em } M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial M \end{cases}$$

Quando (M, g) é uma variedade Riemanniana fechada a escolha natural é $H = H^1(M, g)$ e resolvemos o problema de autovalores $\Delta u = \lambda u$ sobre M .

De fato, a teoria de regularidade para funções fracas de equações elípticas mostra que as autofunções construídas no Teorema 2.5 são na verdade diferenciáveis (ver por exemplo: Gilbarg / Trudinger [G-T], cor. 8.11 pag. 176).

ESPECTRO DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Nesta seção as variedades são fechadas.

2.8 DEFINIÇÃO: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, para $k \geq 0$ chama-se o k -espectro, denotado por $Spec^k(M, g)$, ao conjunto

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \text{ existe } \alpha \in \Omega^k(M), \alpha \neq 0, \text{ e } \Delta \alpha = \lambda \alpha \right\},$$

no caso de $k = 0$, diz-se, simplesmente, o espectro de (M, g) e é denotado por $Spec(M, g)$.

2.9 NOTA: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana

(a) Seja $C_c^\infty(M)$ o espaço das funções, C^∞ , a valores em \mathcal{C} , munido do seguinte produto interior

$$(f, h) = \int_M f \bar{h} V_g, \quad (f, h \in C_c^\infty(M)). \quad (9)$$

Seja $\Delta_{\mathcal{C}}$ a expressão de Δ em $C_c^\infty(M)$. Isto é um operador auto-adjunto definido positivo. Então denota-se

$$Spec_{\mathcal{G}}(M, g) = \{\lambda \in \mathcal{C} : \text{ existe } f \in C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M) \text{ } f \neq 0, \Delta_{\mathcal{G}} f = \lambda f\} \quad (10)$$

(b) Os subespaços de $\Omega^k(M)$ formados pelas k -formas próprias relativas a λ_i também é denotado por $E_i^k(M, g)$ e quando não existir possibilidade de confusão escreve-se simplesmente $E_i(M, g)$ e $E(M, g)$ para denotar a soma direta

$$E(M, g) = \sum E_i(M, g).$$

(c) Observe também que $E(M, g)$ dado em (b) é denso em $\Omega^k(M)$ com a *Topologia da Convergência Uniforme* e separa pontos.

2.10 LEMA: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e suponha dado para todo $i \in \mathbb{N}$ um subespaço vetorial V_i de $C^{\infty}(M)$ de maneira que as seguintes condições sejam verificadas

- (a) Para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que para todo $f \in V_i$, $\Delta f = \lambda_i f$
- (b) A soma

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

é densa em $C^{\infty}(M)$ na topologia de L^2 .

Então o $Spec(M, g)$ é o conjunto dos λ_i e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $V_i = E_i(M, g)$.

Observe que este Lema também vale para o operador Laplaciano de Hodge-De Rham.

PROVA: É claro (jogamos fora os V_i que se reduzem a $\{0\}$) que os λ_i pertencem ao $Spec(M, g)$. Reciprocamente seja $\lambda \in Spec(M, g)$, então, se λ é diferente de todos os λ_i tem-se $E_{\lambda}(M, g) \neq \{0\}$ e $E_{\lambda}(M, g)$ será ortogonal a V_i para todo i , isso é incompatível com a densidade de

$$\sum_{i \in N} V_i$$

logo o $\text{Spec}(M, g)$ é o conjunto dos λ_i dados em (a).

Observe que $V_i \subseteq E_i(M, g)$ e resulta que V_i é de dimensão finita. Suponha que $V_i \neq E_i(M, g)$. Então acha-se $\varphi \in E_i(M, g)$ ortogonal a V_i . De outro lado, φ será ortogonal a todos os V_j para $j \neq i$. Portanto, será ortogonal a V_j para todo j . Isto contradiz (b). Logo

$$V_i = E_i(M, g).$$

PRODUTOS

Antes de entrar no assunto, veja que o Laplaciano sobre variedades Riemannianas é um invariante riemanniano. Mais exatamente, dado o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (M, g) & \xrightarrow{\varphi} & (N, h) \\ & \searrow f \circ \varphi & \swarrow f \\ & \mathbf{R} & \end{array}$$

onde φ é uma isometria de (M, g) sobre (N, h) , então

$$\Delta^M(f \circ \varphi) = \Delta^N f \circ \varphi \quad (11)$$

(11) é um caso particular da seguinte proposição:

2.11 PROPOSIÇÃO: Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas. Se

$$p : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

é uma submersão Riemanniana^(*) com fibras totalmente geodésicas, então para toda função $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se

$$\Delta^M(f \circ p) = \Delta^N f \circ p. \quad (12)$$

PROVA: O espaço tangente num ponto m de (M, g) se decompõe canonicamente em dois subespaços ortogonais $(T_m M)^V$ e $(T_m M)^H$, o segundo se projetando isometricamente via $dp(m)$ sobre $T_{p(m)} N$. Seja, então $\{x_i, y_j\}$ uma base de $T_m M$, onde $\{x_i\}$ é uma base do subespaço horizontal e $\{y_j\}$ uma base do subespaço vertical. As geodésicas correspondente são notadas por γ_i, δ_j respectivamente. Pelo Teorema 1.11 (d)

$$\Delta^M(f \circ p) = - \sum_i \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ p \circ \gamma_i) - \sum_j \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (f \circ p \circ \delta_j) \quad (13)$$

Como p é uma submersão riemanniana a projeção de δ_j é a geodésica gerada pela projeção de x_j . O primeiro termo do segundo membro de (13) é $\Delta^N f \circ p$ e como $f \circ p \circ \delta_j = 0_{p(m)}$ então (13) toma a forma

$$\Delta^M(f \circ p) = \Delta^N f \circ p.$$

2.12 NOTA: Um caso particular e importante de 2.11 é o produto $(M \times N, g \times h)$ de duas variedades Riemannianas (M, g) e (N, h) . Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & p & q \\ (M, g) & & (N, h) \\ & a & b \\ & R & \end{array}$$

(*) Para lembrar a definição de submersão Riemanniana, ver por exemplo, [B-G-M] pag 7.

onde p, q são duas submersões Riemannianas, a e b são duas funções reais definidas respectivamente sobre M e N . Logo

$$\Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (b \circ q) \times \Delta^{M \times N}(a \circ p) - 2\langle d(a \circ p), d(b \circ q) \rangle + (a \circ p) \times \Delta^{M \times N}(b \circ q). (*)$$

o segundo termo é nulo como produto escalar de duas formas ortogonais. E pela proposição 2.11 tem-se

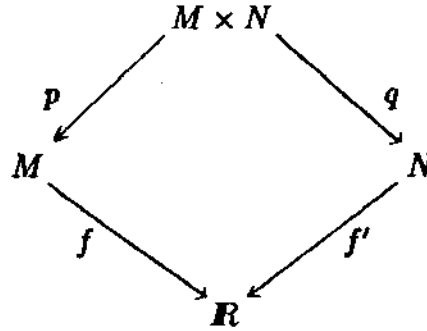
$$\Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (b \circ q) \times \Delta^M a \circ p + (a \circ p) \times \Delta^N b \circ q.$$

Se a é auto-função própria de Δ^M com auto-valor λ e b de Δ^N com auto-valor μ , tem-se

$$\Delta^{M \times N}[(a \circ p) \times (b \circ q)] = (\lambda + \mu)[(a \circ p) \times (b \circ q)] \quad (14)$$

Isto é, $(a \circ p) \times (b \circ q)$ é uma auto-função de $\Delta^{M \times N}$ associada ao auto-valor $(\lambda + \mu)$.

Agora, considere em $C^\infty(M \times N)$ o subespaço vetorial gerado por todos os produtos $(f \circ p)(f' \circ q)$, onde p, q são as projeções respectivas de $M \times N$ sobre M e N , e $f \in E(M, g), f' \in E(N, h)$.



Esse subespaço vetorial será denotado por

$$p^* E(M, g) \oplus q^* E(N, h)$$

(*) Não é difícil provar que $\Delta(f \cdot h) = f\Delta h - 2\langle df, dh \rangle + h\Delta f$.

e é isomorfo a $E(M, g) \oplus E(N, h)$.

2.13 PROPOSIÇÃO:

- (a) $p^*E(M, g) \oplus q^*E(N, h) = E(M \times N, g \times h)$.
- (b) $\text{Spec}(M \times N, g \times h) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \text{Spec}(M, g), \mu \in \text{Spec}(N, h)\}$.
- (e) Se $\eta \in \text{Spec}(M \times N, g \times h)$ tem-se

$$E_\eta(M \times N, g \times h) = \sum_{\substack{\lambda + \mu = \eta \\ \lambda \in \text{Spec}(M, g) \\ \mu \in \text{Spec}(N, h)}} p^*E_\lambda(M, g) \oplus q^*E_\mu(N, h)$$

PROVA: Em primeiro lugar tem-se a seguinte decomposição (ver (2.12))

$$p^*E(M, g) \oplus q^*E(N, h) = \sum_{\eta} W_{\eta}$$

onde η é a soma de algum valor próprio de (M, g) com um valor próprio de (N, h) e

$$W_{\eta} = \sum_{\lambda + \mu = \eta} p^*E_{\lambda}(M, g) \oplus q^*E_{\mu}(N, h).$$

É suficiente, para estabelecer a proposição, mostrar que

$$W_{\eta} \subseteq E_{\eta}(M \times N, g \times h)$$

e que $p^*E(M, g) \oplus q^*E(N, h)$ é denso em $C^\infty(M \times N)$ com a topologia da média quadrática (ver prop. 2.10).

Para a primeira afirmação, seja $f \in E_\lambda(M, g)$ e $f' \in E_\mu(N, h)$, tem-se então, por 2.12:

$$\Delta^{M \times N}(f \circ p) \cdot (f' \circ q) = (\lambda + \mu)(f \circ p) \cdot (f' \circ q)$$

isto é, $\lambda + \mu$ está no $\text{Spec}(M \times N, g \times h)$ e assim

$$p^*E_\lambda(M, g) \oplus q^*E_\mu(N, h) \subseteq E_{\lambda+\mu}(M \times N, g \times h)$$

Quanto à densidade, por um lado $E(M, g)$ é L_2 -denso em $C^\infty(M)$ e da mesma forma $E(N, h)$ é denso em $C^\infty(N)$ e também $p^*E(M, g) \oplus q^*E(N, h)$ é denso na média quadrática em $p^*C^\infty(M) \oplus q^*C^\infty(N)$. E por uma aplicação imediata do Teorema de Stone-Weierstrass(ver, por exemplo, Rudin [RN], pag 162) tem-se

$$p^*C^\infty(M) \oplus q^*C^\infty(N)$$

é denso em $C^\infty(M \times N)$ no sentido da convergência uniforme e portanto em média quadrática. Portanto $p^*E(M, g) \oplus q^*E(N, h)$ é denso em $C^\infty(M \times N)$ na média quadrática. O que prova a proposição 2.13.

2.14 PROPOSIÇÃO: Seja $(\tilde{M}, \tilde{g}) \xrightarrow{p} (M, g)$ um recobrimento Riemanniano ou submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas. Então as funções próprias de (M, g) são os quocientes por p das funções próprias de (\tilde{M}, \tilde{g}) que são constantes sobre as fibras.

PROVA: Por um lado, seja $f \in E_\lambda(M, g)$, então pela fórmula (12) tem-se

$$\Delta^{\tilde{M}}(f \circ p) = \Delta^M f \circ p = \lambda f \circ p$$

onde $\lambda \in \text{Spec}(M, g)$ e $f \circ p \in E_\lambda(\tilde{M}, \tilde{g})$.

Reciprocamente, seja $\tilde{f} \in E_{\tilde{\lambda}}(\tilde{M}, \tilde{g})$, constante sobre as fibras e seja f tal que $\tilde{f} = f \circ p$, então

$$f \in C^\infty(M)$$

Dai

$$\tilde{\lambda} f \circ p = \Delta^{\tilde{M}} \tilde{f} = \Delta^M f \circ p$$

Donde $\Delta^M f = \tilde{\lambda} f$ e assim $\tilde{\lambda} \in \text{Spec}(M, g)$ e $f \in E_{\tilde{\lambda}}(M, g)$.

ESPECTRO DO TORO PLANO

Seja Γ um reticulado de \mathbb{R}^n (isto é, $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_n$ onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de \mathbb{R}^n) e considere o toro plano $(T_\Gamma, g_\Gamma) = (\mathbb{R}^n/\Gamma, g_0/\Gamma)$, onde g_0 é a métrica Riemanniana natural de \mathbb{R}^n , $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$.

2.15 LEMA: Seja Γ^* o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que para todo $y \in \Gamma$, $\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}$. Então

- (a) Γ^* é um reticulado de \mathbb{R}^n , chamado RETICULADO DUAL de Γ
- (b) $(\Gamma^*)^* = \Gamma$

PROVA: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de Γ e considere os vetores e_1^*, \dots, e_n^* definidos por

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\forall i, j = 1, \dots, n)$$

o sistema $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ existe, é único, e forma uma base de \mathbb{R}^n . De fato, é a imagem pelo isomorfismo musical# da base dual $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Agora pode-se verificar facilmente que os e_i^* formam uma base para Γ^* e Γ^* é então um reticulado.

Uma base de $(\Gamma^*)^*$ é então definido por $\langle e_i^{**}, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, n$. Isto somente acontece se $e_i^{**} = e_i$. Então $(\Gamma^*)^* = \Gamma$, que mostra o lema.

Utilizando a nota 2.9 vai-se calcular o espectro de (T_Γ, g_Γ) como o espectro do $\Delta_{\mathcal{G}}$ sobre $C_c^\infty(T)$. Por comodidade elimina-se a menção a \mathcal{G} .

Para todo $x \in \Gamma^*$, defina-se uma função C^∞ sobre \mathbb{R}^n por

$$f_x(y) = e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \quad (i = (-1)^{1/2})$$

O fato que $x \in \Gamma^*$ implica que essa função passa ao quociente por Γ e define então uma função $f_x \in C^\infty(T)$.

Para calcular Δf_x observe

$$f_x(y) = e^{2\pi i \sum x_j y_j}$$

onde x_j, y_j são as coordenadas em relação a base Γ^* , daí

$$\frac{\partial^2 f_x}{\partial y_j^2} = -4\pi x_j^2 f_x$$

e portanto

$$\Delta f_x = \sum_{j=1}^n 4\pi x_j^2 f_x = 4\pi |x|^2 f_x$$

Assim, tem-se uma parte de espectro de (T_Γ, g_Γ) . Esse é o conjunto dos $\lambda = 4\pi |x|^2$, com $x \in \Gamma^*$. A cada um é associado um espaço de autofunções E_λ que são geradas pelas f_x com $\|x\|^2 = \lambda/4\pi^2$. Note que essas f_x formam uma base para E_λ . Em efeito, primeiro prova-se que as f_x são linearmente independentes. Uma função só é linearmente independente, quando não é nula. Suponha que $k-1$ funções f_{x_j} com todos os x_j diferentes, $x_j \in \Gamma^*$ são, linearmente independentes. Considere então a seguinte relação linear:

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j f_{x_j} = 0$$

e para $y \in \mathbb{R}^n$ pode-se escrever

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e^{2\pi i \langle x_j - x_k, y \rangle} = \alpha_k \tag{15}$$

Tomando Laplaciano em (15) tem-se

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j 4\pi |x_j - x_k|^2 e^{2\pi i(x_j - x_k, y)} = 0 \quad (16)$$

E aplicando hipóteses de indução em (16):

$$\alpha_j 4\pi |x_j - x_k|^2 = 0 (j = 1, \dots, k-1).$$

Logo $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Substituindo em (15) tem-se $\alpha_k = 0$. Isto mostra que f_{x_j} são linearmente independentes, sempre que os x_j sejam diferentes e não nulos.

Como a dimensão de E_λ é igual ao número de $x \in \Gamma^*$ tais que $|x|^2 = \lambda/4\pi^2$, observe que essa dimensão é par se $\lambda > 0$.

Para se dizer que temos todos os autovalores de (T_Γ, g_Γ) precisamos da seguinte

2.16 PROPOSIÇÃO:

- (a) $\lambda \in \text{Spec}(T_\Gamma, g_\Gamma) \Leftrightarrow$ existe $x \in \Gamma^*$ tal que $|x|^2 = \lambda/4\pi^2$.

E o número de tais x é igual à multiplicidade de λ .

- (b) Uma base para $E_\lambda(T_\Gamma, g_\Gamma)$ é formada pelas funções

$$f_x : y \longrightarrow e^{2\pi i(x, y)}$$

A multiplicidade de λ é par se $\lambda > 0$.

PROVA: Basta mostrar (a). De fato, de acordo com o Lema 2.10 é suficiente mostrar que $\sum_\lambda E_\lambda$ é denso em $C^\infty(T_\Gamma)$. Isto será uma aplicação do Teorema de Stone-Weierstrass.

Note que para $x, y \in \Gamma^*$, $x + y \in \Gamma^*$ e $f_x f_y = f_{x+y}$. Também tem-se imediatamente que $\sum_{\lambda} E_{\lambda}$ é uma subálgebra de $C^{\infty}(T_{\Gamma})$. Basta mostrar que essa subálgebra satisfaz as hipóteses do Teorema de Stone-Weierstrass complexo. Primeiramente $1 = f_0$ está em $\sum_{\lambda} E_{\lambda}$ e portanto contém as constantes. Se

$$f_x \in \sum_{\lambda} E_{\lambda}$$

então, se $i = (-1)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \overline{f_x(y)} &= \cos(2\pi \sum x_i y_i) - i \sin(2\pi \sum x_i y_i) \\ &= e^{2\pi i(-x, y)} = f_{(-x)}(y). \end{aligned}$$

Portanto $\overline{f_x} \in \sum_{\lambda} E_{\lambda}$.

$\sum_{\lambda} E_{\lambda}$ separa pontos. Sejam $y, y' \in \mathbb{R}^n$ tais que para todo $x \in \Gamma^*$ $e^{2\pi i(x, y)} = e^{2\pi i(x, y')}$. Então $(x, y - y') \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \Gamma^*$. Daí $y - y' \in \Gamma$. Isto mostra que $[y] =_{\Gamma} [y']$. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass complexo (ver, por exemplo, Rudin [RN], pag. 165) tem-se (a) desta proposição.

(b) Consequência imediata de 2.16(a) e o parágrafo anterior.

2.17 PROPOSIÇÃO: Sejam Γ e Γ' dois reticulados de \mathbb{R}^2 . Se

$$\text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_0/\Gamma) = \text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma', g_0/\Gamma')$$

Então

$$(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_0/\Gamma) = (\mathbb{R}^2/\Gamma', g_0/\Gamma')$$

PROVA: Para que $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_0/\Gamma) = (\mathbb{R}^2/\Gamma', g_0/\Gamma')$ falta e é suficiente que $\Gamma = \Gamma'$ módulo uma isometria de (\mathbb{R}^2, g_0) . Por outro lado $\Gamma = \Gamma'$ módulo uma isometria equivale, pelo Lema 2.15, a $\Gamma^* = (\Gamma')^*$ módulo uma isometria.

Então deseja-se mostrar que se $\text{Spec}(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_0/\Gamma)$ é conhecido, então Γ^* é conhecido módulo isometria.

Como o comprimento do vetor mais curto não nulo de Γ^* é conhecido e tem valor $a = \sqrt{\lambda_1}/2\pi$, então fixe em \mathbb{R}^2 o vetor $(a, 0)$ e identifique-o com o número real a . Como pode-se achar o outro gerador Γ^* ?

Primeiro observe que se $z \in \Gamma^*$, z não está no interior dos círculos de raio a e centro na para todo $n \in \mathbb{Z}$ [em caso contrário $z - na \in \Gamma^*$ e $|z - na| < a$]. Também pode-se supor que a ordenada de z é positiva [pois se não, usa-se uma reflexão sobre o eixo x]. Se a abscissa de z está no intervalo $[na - a/2, na + a/2]$ para algum inteiro n , então $z - na$ está em Γ^* e a abscissa de $z - na$ está em $[-a/2, a/2]$. Usando uma isometria, pode-se escolher z com abscissa em $[0, a/2]$, ordenada ≥ 0 e fora do círculo de raio a e centro $(0, 0)$.

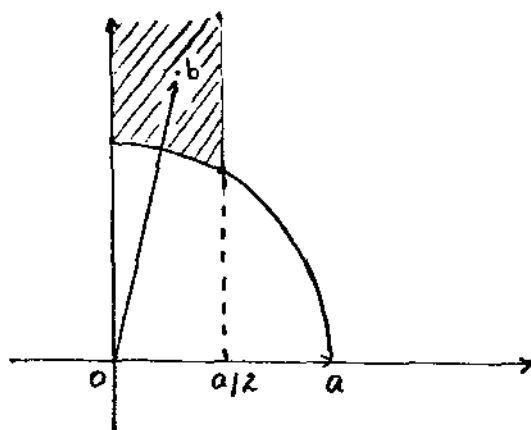


FIGURA 1

É claro que dois pontos diferentes na região sublinhada da Figura 1 determina dois reticulados diferentes. Isto é existe assim uma bijeção entre essa região e o conjunto dos Toros Planos em dimensão dois.

Seja $b \in \Gamma^*$ tal que $|b| \geq |a| = a$ e de comprimento mínimo na região sublinhada da Figura 1.

Descarta-se então do espectro os números da forma $k^2\lambda_1$ para $k \in \mathbb{N}$, correspondentes a ka , e $-ka$. Então o menor valor próprio restante é $4\pi^2|b|^2$. E então $|b|$ é conhecido.

Para continuar observe (deseja-se determinar b)

$$\langle a, b \rangle \text{ verifica } 0 \leq \langle a, b \rangle \leq \frac{|a|^2}{2}$$

e também temos,

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2).$$

Como

$$0 \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2) \leq \frac{|a|^2}{2}$$

então

$$-|a|^2 \leq |b|^2 - |a - b|^2 \leq 0$$

Dai

$$|b|^2 \leq |b - a|^2 \leq |a|^2 + |b|^2$$

Eliminando de novo, desse resto do espectro os dois primeiros termos correspondente a b e $-b$. Vamos mostrar que $|b - a|$ está entre os $\sqrt{\lambda}/2\pi$ onde λ pertence ao espectro que resta.

$$|b|^2 \leq \frac{\lambda}{4\pi^2} \leq |a|^2 + |b|^2$$

esse λ é necessariamente igual a $4\pi^2|b - a|^2$, de sorte que $|b - a|$, por ligação com $\langle a, b \rangle$ e b , é conhecido.

Então para tentar com os $x \in \Gamma^*$ diferentes de $ka, k \in \mathbb{Z}$ de b e de $-b$ verificando

$$|b|^2 \leq |x|^2 \leq |a|^2 + |b|^2, \quad (17)$$

ponha $x = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, então

$$|\alpha a + \beta b|^2 = \alpha^2 |a|^2 + 2\alpha\beta \langle a, b \rangle + \beta^2 |b|^2$$

e deve-se exigir por (17) que

$$\alpha^2 |a|^2 + 2\alpha\beta \langle a, b \rangle + \beta^2 |b|^2 - |a|^2 - |b|^2 \leq 0. \quad (18)$$

Para β fixo, o primeiro membro de (18) é um trinômio de segundo grau em α . Se provará que (18) jamais é < 0 se seu discriminante $\Delta'(\beta) < 0$. De fato

$$\begin{aligned}\Delta'(\beta) &= \beta^2 \langle a, b \rangle^2 - |a|^2 (\beta^2 |b|^2 - |a|^2 - |b|^2) \\ &= \beta^2 [\langle a, b \rangle^2 - |a|^2 |b|^2] + |a|^2 [|a|^2 + |b|^2] \\ &\leq \beta^2 [\langle a, b \rangle^2 - |a|^2 |b|^2] + 2|a|^2 |b|^2 \\ &\leq 2|a|^2 |b|^2 + \beta^2 \left[\frac{|a|^4}{4} - |a|^2 |b|^2 \right] \\ &= \frac{|a|^2}{4} [8|b|^2 - 4\beta^2 |b|^2 + \beta^2 |a|^2] \\ &\leq \frac{|a|^2 |b|^2}{4} [8 - 3\beta^2]\end{aligned}$$

É claro que $\Delta'(\beta) < 0$ se $\beta^2 > \frac{8}{3}$.

Chame f_β ao polinômio quadrático, em α , do primeiro membro de (18), então f_β tem um valor mínimo (visto como função real em α) em $\alpha = -\beta \langle a, b \rangle / |a|^2$ e

$$\begin{aligned}f_\beta(-\beta \langle a, b \rangle / |a|^2) &= [\beta^2 (|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2) - |a|^2 (|a|^2 + |b|^2)] / |a|^2 \\ &\geq \beta^2 \left(|b|^2 - \frac{|a|^2}{4} \right) - (|a|^2 + |b|^2) \\ &> 0 \quad (\text{pois, } \beta^2 > 8/3),\end{aligned}$$

o que contradiz (18).

Suponha $\beta = 0$, então x é múltiplo de a e foram descartado os valores próprios correspondentes.

Suponha $\beta = \pm 1$, e como podemos substituir x por $-x$ limitando-nos a $\beta = 1$. Então

$$|\alpha a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = \alpha^2 |a|^2 + 2\alpha \langle a, b \rangle - |a|^2, \quad (19)$$

para $\alpha > 1$, (19) é > 0 e portanto, por (18), descarta-se $\alpha > 1$. Para $\alpha = 1$ então

$$|a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = 2\langle a, b \rangle$$

e para ter (18), $\langle a, b \rangle = 0$, e então tem-se como solução $\lambda = 4\pi^2|a + b|^2$. Mas note que neste caso $|b + a| = |b - a|$ e de sorte que $\lambda = 4\pi^2|b - a|^2$. Como está-se no caso $\langle a, b \rangle = 0$, a quantidade considerada em (19) fica

$$|\alpha a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = \alpha^2|a|^2 - |a|^2 > 0$$

sempre que $\alpha < -1$. Resta então o caso $\alpha = -1$ aqui fica então a solução $\lambda = 4\pi|b - a|^2$.

Descartando de agora em diante o caso $\langle a, b \rangle = 0$, então para $\alpha = 1$ (19) fica

$$|\alpha a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = 2\langle a, b \rangle > 0$$

o trinômio do lado esquerdo de (19) (como $\alpha \in \mathbf{R}$) tem um mínimo para

$$\alpha = -\langle a, b \rangle / |a|^2 > -1/2$$

e tal trinômio é > 0 fora do intervalo aberto $(-2, 1)$. Daí que a única solução é $\alpha = -1$ que fornece

$$\lambda = 4\pi^2|b - a|^2$$

Portanto o conhecimento do espectro determina a e b , e assim determina o toro.

ESPECTRO DA GARRAFA DE KLEIN PLANA

Considere a garrafa de Klein plana $K(a, b)$ correspondente ao reticulado $\Gamma = \mathbb{Z}ae_1 + \mathbb{Z}be_2$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbf{R}^2 , $a > 0, b > 0$ e (x, y) também é identificado com $(x + \frac{a}{2}, -y)$. Então tem-se imediatamente que

$$\Gamma^* = \frac{\mathbb{Z}e_1}{a} + \frac{\mathbb{Z}e_2}{b}$$

Sabe-se que o toro, (T_Γ, g_Γ) , é um recobrimento de duas folhas de $K(a, b)$ com valores próprios (pela Proposição 2.16):

$$4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (n, m \in \mathbb{Z})$$

e as funções próprias correspondentes

$$\sum_{m,n} \alpha_{m,n} e^{2\pi i \left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y \right)}$$

com $\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{\lambda}{4\pi^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_{m,n} \in \mathbb{C}$.

Por comodidade ponha $\bar{\lambda} = \lambda/4\pi^2$. As funções próprias de $K(a, b)$ estão entre as anteriores que são invariantes por

$$(x, y) \longrightarrow \left(x + \frac{a}{2}, -y\right).$$

E como

$$\sum_{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \bar{\lambda}} \alpha_{m,n} e^{2\pi i \left[\frac{m}{a} \left(x + \frac{a}{2}\right) - \frac{n}{b}y \right]} = \sum_{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \bar{\lambda}} \alpha_{m,n} e^{i\pi m} e^{2\pi i \left(\frac{m}{a}x - \frac{n}{b}y \right)}$$

seja,

$$f_{m,n}(x, y) = e^{2\pi i \left(\frac{m}{a}x + \frac{n}{b}y \right)}$$

assim, as funções próprias de $K(a, b)$ devem satisfazer

$$\sum_{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \bar{\lambda}} \alpha_{m,n} f_{m,n}(x, y) = \sum_{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \bar{\lambda}} (-1)^m \alpha_{m,n} f_{m,-n}(x, y)$$

Daí, um cálculo simples da independência linear das $f_{m,n}$, nos dá

$$\alpha_{m,n} = (-1)^m \alpha_{m,-n} \quad (20)$$

As funções próprias de $K(a, b)$ são então

$$\sum_{\substack{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \bar{\lambda} \\ n \neq 0}} \alpha_{m,n} (f_{m,n} + (-1)^m f_{m,-n}) + \sum_{\frac{m^2}{a^2} = \bar{\lambda}} \alpha_{m,0} (1 + (-1)^m) f_{m,0} \quad (21)$$

Agora

$$f_{m,n}(x, y) + (-1)^m f_{m,-n}(x, y) = \begin{cases} 2e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \cos \frac{ny}{b}, & m \text{ par} \\ 2ie^{2\pi i \frac{mx}{a}} \sen \frac{ny}{b}, & m \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$f_{m,0}(x, y) = e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \cos \frac{0 \cdot y}{b}$$

Finalmente $E(K(a, b))$ é gerado pelas funções

$$\begin{cases} e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \cos \frac{ny}{b}, & m \text{ par}, n \geq 0 \\ e^{2\pi i \frac{mx}{a}} \sen \frac{ny}{b}, & m \text{ ímpar}, n \neq 0 \end{cases}$$

e verifica-se facilmente que as funções formam uma base para $E(K(a, b))$.

De fato, quando $\bar{\lambda}$ escreve-se como n^2/b^2 , ele admite uma função própria, $\cos \frac{ny}{b}$; e além disso as funções próprias

$$e^{2\pi i m' x/a} \cos \frac{n'y}{b}, \text{ e, } e^{2\pi i m'' x/a} \sen \frac{n''y}{b} \quad (22)$$

classificam-se por pares de funções distintas por mudanças de m' em $-m'$ aquelas de primeiro tipo em (22) e de m'' em $-m''$, n'' em $-n''$ aquelas do segundo tipo. Se $\bar{\lambda}$ não pode ser escrito na forma n^2/b^2 , as funções próprias se classificam por pares de funções

distintas, então λ é de multiplicidade par.

A discussão anterior fornece o seguinte resultado

2.18 PROPOSIÇÃO:

$$\text{Spec}(K(a, b)) = \left\{ 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) : n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ se } m \text{ é ímpar} \right\}$$

Os valores próprios que se podem escrever como $4\pi^2 n^2/b^2$ são de multiplicidade ímpar, os outros são de multiplicidade par.

2.19 COROLÁRIO: Sejam (T_Γ, g_Γ) e $K(a, b)$ um toro plano e uma garrafa de Klein plana.

Então

$$\text{Spec}(T_\Gamma, g_\Gamma) \neq \text{Spec}(K(a, b)).$$

PROVA: Todos os valores próprios > 0 de (T_Γ, g_Γ) são de multiplicidade par mas $K(a, b)$ admite uma infinidade de valores próprios > 0 de multiplicidade ímpar.

ESPECTRO DA ESFERA

Considere (\mathbb{R}^{n+1}, g_0) onde g_0 é a métrica Riemanniana usual de \mathbb{R}^n , isto é $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$. Também denote por g_0 a métrica Riemanniana que essa métrica induz sobre S^n . Sabe-se que

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f) \Big|_{S^n} = \Delta^{S^n} (f \Big|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{S^n} - n \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{S^n}.$$

Em particular, seja H um polinômio homogêneo de grau $k \geq 0$. Então $H = r^k H|_{S^n}$ e então

$$\frac{\partial H}{\partial r} = kr^{k-1} H|_{S^n}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)r^{k-2} H|_{S^n}$$

Dáí

$$\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = (\Delta^{R^{n+1}} H)|_{S^n} + k(n+k-1)H|_{S^n}$$

e se H é harmônico sobre R^{n+1} tem-se

$$\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = k(n+k-1)H|_{S^n}.$$

Seja \mathcal{H}_k o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k harmônicos sobre R^{n+1} . A restrição a S^n é um isomorfismo de \mathcal{H}_k sobre um subespaço $\tilde{\mathcal{H}}_k$ de $C^\infty(S^n)$. S^n admite por valor próprio $k(n+k-1)$ para todo $k \geq 0$, e $\tilde{\mathcal{H}}_k$ está contido no subespaço próprio associado.

2.20 PROPOSIÇÃO: O espectro de (S^n, g_0) é o conjunto $\lambda_k = k(n+k-1)$, $k \geq 0$ e o subespaço associado a λ_k é $\tilde{\mathcal{H}}_k$.

Antes de demonstrar essa proposição, introduz-se o espaço \mathcal{P}_k de todos os polinômios homogêneos de grau k sobre R^{n+1} . Se $f \in C^\infty(R^{n+1})$ denote por \tilde{f} a restrição de f a S^n , $\bigoplus_k \mathcal{P}_k$ tem uma estrutura euclidiana: para todo $p, q \in \bigoplus_k \mathcal{P}_k$,

$$\langle p, q \rangle = \int_{S^n} \tilde{p} \tilde{q}$$

integrados na medida canônica de (S^n, g_0) .

Para mostrar a proposição 2.20 precisamos do seguinte lema:

2.21 LEMA: Para todo $k \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{2k} &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{P}_{2k+1} &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1\end{aligned}$$

e os subespaços dessa decomposição são dois a dois ortonormais.

PROVA: Primeiro veja que a proposição 2.20 é consequência deste Lema. De fato, pelo Teorema de Stone-Weierstras, $\bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{P}}_k$ é denso em $C^\infty(S^n)$ segundo a convergência uniforme e de graça em média quadrática. Por outro lado, para todo k , $\tilde{\mathcal{P}}_k$ é soma de $\tilde{\mathcal{H}}_\ell$ para certos $\ell \leq k$. Então a soma dos $\tilde{\mathcal{H}}_\ell$, $\ell \geq 0$ é igual a $\bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{P}}_k$ e portanto denso em $C^\infty(S^n)$ em média quadrática e 2.20 segue pelo Lema 2.10.

Agora prova-se o Lema 2.21 por indução. Observe que ele é verdadeiro para \mathcal{P}_0 e \mathcal{P}_1 , com $\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0$ é formado pelas constantes, e $\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1$ são as funções lineares. É então suficiente mostrar que se $k \geq 2$, a decomposição $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{P}_{k-2}$, implica a decomposição

$$\mathcal{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k$$

Em primeiro lugar, observe diretamente que $\mathcal{H}_{k+2} + r^2 \mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{P}_{k+2}$ e tal soma é direta. Para mostrar a ortogonalidade, basta provar que $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e $\tilde{\mathcal{P}}_k$ são ortogonais em $C^\infty(S^n)$. Mas $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ está contido em um subespaço próprio de (S^n, g_0) relativo ao valor próprio $(k+2)(n+k+1)$. Entretanto, pela hipótese de recorrência, $\tilde{\mathcal{P}}_k$ está contido na soma dos subespaços próprios associados a valores próprios distintos de $(k+2)(n+k+1)$. Como os subespaços próprios são dois a dois ortogonais, $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$, e, $\tilde{\mathcal{P}}_k$ são ortogonais.

Como os subespaços próprios são dois a dois ortogonais, $\tilde{\mathcal{H}}_{k+2}$ e $\tilde{\mathcal{P}}_k$ são ortogonais.

Para estabelecer o Lema é suficiente mostrar que se P é um elemento de \mathcal{P}_{k+2} ortogonal a \mathcal{P}_k então P é harmônico, isto é $\Delta P = 0$. Agora ΔP está em \mathcal{P}_k então pela hipótese de recorrência ele é nulo se e só se ele é ortogonal a todos os $r^{2\ell} \mathcal{H}_{k-2\ell}$ com $0 \leq 2\ell \leq k$, se e só se ΔP é ortogonal a todo $\tilde{\mathcal{H}}_{k-2\ell}$.

Nos cálculos que se seguem, adota-se a notação seguinte: para toda função f definida em \mathbb{R}^{n+1} , Δf é o Laplaciano de f no sentido de (\mathbb{R}^{n+1}, g_0) , e $\tilde{\Delta} f$ é o Laplaciano de \tilde{f} no

sentido de (S^n, g_0) .

Para todo $P \in \mathcal{P}_{k+2}$ e $H \in \mathcal{H}_{k-2\ell}$ temos

$$\Delta \widetilde{P} \tilde{H} = \Delta \tilde{P} \cdot \tilde{H} - 2\langle d\tilde{P}, d\tilde{H} \rangle + \tilde{P} \cdot \Delta \tilde{H}.$$

Donde

$$0 = \int_{S^n} \Delta \widetilde{P} \tilde{H} = \int_{S^n} \Delta \tilde{P} \cdot \tilde{H} - 2 \int_{S^n} \langle d\tilde{P}, d\tilde{H} \rangle + \int_{S^n} \tilde{P} \cdot \Delta \tilde{H}$$

e portanto $\Delta \tilde{H} = (k - 2\ell)(n + k - 2\ell - 1)\tilde{H}$, então o terceiro termo vale

$$(k - 2\ell)(n + k - 2\ell - 1) \int_{S^n} \tilde{P} \tilde{H} = 0$$

já que \tilde{P} é ortogonal a $\tilde{\mathcal{P}}_k$. Resta então

$$\int_{S^n} \Delta \tilde{P} \cdot \tilde{H} - 2 \int_{S^n} \langle d\tilde{P}, d\tilde{H} \rangle$$

Como

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{P} &= \widetilde{\Delta P} + \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial r^2} + n \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \\ &= \widetilde{\Delta P} + (k + 2)(n + k + 1)\tilde{P} \end{aligned}$$

resulta

$$\int_{S^n} \Delta \tilde{P} \cdot \tilde{H} = \int_{S^n} \widetilde{\Delta P} \cdot \tilde{H} + (k + 2)(n + k + 1) \int_{S^n} \tilde{P} \tilde{H} = \int_{S^n} \widetilde{\Delta P} \cdot \tilde{H}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{S^n} \widetilde{\Delta P} \cdot \tilde{H} &= 2 \int_{S^n} \langle d\tilde{P}, d\tilde{H} \rangle = 2\langle d\tilde{P}, d\tilde{H} \rangle_0 = 2\langle \tilde{P}, \Delta \tilde{H} \rangle_0 \\ &= 2(k - 2\ell)(n + k - 2\ell - 1)\langle \tilde{P}, \tilde{H} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Portanto ΔP é ortogonal a \mathcal{P}_k . Isto é $\Delta P = 0$ o que mostra o Lema 2.21 e portanto a proposição 2.20

2.22 COROLÁRIO: A multiplicidade de $\lambda_k = k(n+k-1)$ no $\text{Spec}(S^n, g_0)$ é igual a

$$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}$$

PROVA: Pelo Lema 2.21 $\dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2}$ e fazendo uma demonstração por indução sobre n prova-se que

$$\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k}$$

e portanto

$$\dim \mathcal{H}_k = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}.$$

ESPECTRO DOS ESPAÇOS PROJATIVOS REAIS

Considere o recobrimento $(S^n, g_0) \rightarrow (\mathbb{R}P^n, g_0)$. Pela proposição 2.14 as funções próprias de $(\mathbb{R}P^n, g_0)$ são induzidas pelas funções próprias de (S^n, g_0) invariantes por simetria com respeito à origem de \mathbb{R}^{n+1} . Estas últimas são induzidas na esfera pelos polinômios harmônicos invariantes por essa simetria, isto é, pelos polinômios harmônicos de grau par.

Designa-se por $\hat{\mathcal{H}}_{2k}$ o espaço das funções induzidas sobre $(\mathbb{R}P^n, g_0)$ pelas funções de $\hat{\mathcal{H}}_{2k}$. Obtemos a seguinte proposição:

2.23 PROPOSIÇÃO: O espectro de $(\mathbb{R}P^n, g_0)$ é o conjunto dos $\lambda_k = 2k(n+2k+1)$, $k \geq 0$, o subespaço próprio associado a λ_k é $\hat{\mathcal{H}}_{2k}$ e a multiplicidade de λ_k é

$$\binom{n+2k}{2k} - \binom{n+2k-2}{2k-2}.$$

ESPECTROS DOS ESPAÇOS PROJATIVOS COMPLEXOS

Deseja-se procurar o espectro de $(\mathbb{C}P^n, g_0)$ usando a fibração por S^1 de S^{2n+1} , $(S^{2n+1}, g_0) \rightarrow (\mathbb{C}P^n, g_0)$, S^{2n+1} mergulhada em $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$. Procuramos as funções próprias em $C^\infty(\mathbb{C}P^n)$. Elas são as funções próprias complexas de (S^{2n+1}, g_0) que são invariantes pelo grupo de números complexos de módulo 1 operando multiplicativamente sobre \mathbb{C}^{n+1} . As funções próprias complexas de (S^{2n+1}, g_0) são induzidas pelos polinômios complexos de \mathbb{R}^{2n+2} . Portanto um polinômio complexo em $x \in \mathbb{R}$ escreve-se de maneira única como um polinômio do mesmo grau em z e \bar{z} , $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Ponha

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

e daí, pode-se verificar

$$\Delta = -4 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

e se P é um polinômio harmônico tem-se

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 P}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} = 0.$$

Considere um polinômio bihomogêneo de grau k em z e grau ℓ em \bar{z} e procuramos uma condição para que ele seja invariante por $z \rightarrow e^{i\alpha} z$ para todo α em \mathbb{R} . Isto é:

$$\begin{aligned} P_{k,\ell}(e^{i\alpha} z, e^{-i\alpha} \bar{z}) &= P_{k,\ell}(e^{i\alpha} z, e^{-i\alpha} \bar{z}) \\ &= (e^{i\alpha})^k (e^{-i\alpha})^\ell P_{k,\ell}(z, \bar{z}) \\ &= e^{i(k-\ell)\alpha} P_{k,\ell}(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

A condição é então $k = \ell$.

Designa-se por $\mathcal{P}_{k,k}$ (resp. $\mathcal{H}_{k,k}$) o espaço vetorial dos polinômios bihomogêneos de grau k em z e \bar{z} (resp. o espaço dos polinômios que são harmônicos) e por $\hat{\mathcal{P}}_{k,k}$, $\hat{\mathcal{H}}_{k,k}$ suas respectivas restrições sobre $\mathbb{C}P^n$ deduzidos por restrição a S^{2n+1} passando depois ao quociente.

Tem-se $\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{P}_{2k-2}$ donde tomando a intersecção com $\mathcal{P}_{k,k}$,

$$\mathcal{P}_{k,k} = \mathcal{H}_{k,k} \oplus r^2 \mathcal{P}_{k-1,k-1}$$

e

$$\tilde{\mathcal{P}}_{k,k} = \tilde{\mathcal{H}}_{k,k} \oplus \tilde{\mathcal{P}}_{k-1,k-1}$$

e resulta que

$$\bigoplus_k \tilde{\mathcal{P}}_{k,k} = \bigoplus_k \tilde{\mathcal{H}}_{k,k}$$

Então é suficiente ver que $\bigoplus_k \tilde{\mathcal{P}}_{k,k}$ é denso em $C^\infty(\mathcal{CP}^n)$ para provar que os $\tilde{\mathcal{H}}_{k,k}$ são os subespaços próprios de (\mathcal{CP}^n, g_0) . E para isso é suficiente mostrar, pelo Teorema de Stone-Weierstrass e 2.10 que

$$\bigoplus_k \tilde{\mathcal{P}}_{k,k}$$

separa pontos de \mathcal{CP}^n .

Então, seja (a_0, \dots, a_n) um ponto de S^{2n+1} sobre os quais o valor de P é conhecido para todo $P \in \bigoplus_k \mathcal{P}_{k,k}$. Primeiro temos que $a_j \bar{a}_j$ é conhecido para todo j , onde $|a_j|^2 = p_j^2$. Um dos p_j é não nulo, por exemplo p_0 . Ponha $a_0 = p_0 e^{i\theta_0}$, onde θ_0 é escolhido arbitrariamente. Se $a_j = p_j e^{i\theta_j}$ então se conhece $a_j \bar{a}_0 = p_j p_0 e^{i(\theta_j - \theta_0)}$. Se $p_j = 0$ então $a_j = 0$. Se $p_j \neq 0$ tem-se

$$a_j = \frac{a_j \bar{a}_0}{p_0}$$

módulo $e^{i\theta_0}$. Finalmente, conhece-se (a_0, \dots, a_n) módulo $e^{i\theta_0}$. Então conhece-se a projeção de (a_0, \dots, a_n) sobre \mathcal{CP}^n , e $\bigoplus_k \tilde{\mathcal{P}}_{k,k}$ separa pontos de \mathcal{CP}^n .

A dimensão de $\tilde{\mathcal{H}}_{k,k}$ ou de $\mathcal{H}_{k,k}$ é

$$\dim \mathcal{P}_{k,k} - \dim \mathcal{P}_{k-1,k-1} = \binom{n+k}{k}^2 - \binom{n+k-1}{k-1}^2 = n(n+2k) \left(\frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k} \right)^2$$

Resumindo, temos a

2.24 PROPOSIÇÃO: O espectro de (\mathcal{CP}^n, g_0) e o conjunto dos $\lambda_k = 4k(n+k)$, $k \geq 0$ e o subespaço próprio associado à λ_k é $\tilde{\mathcal{H}}_{k,k}$ e a multiplicidade de λ_k é

$$n(n+2k) \left(\frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k} \right)^2.$$

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DO CALOR EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo todas as variedades são conexas e compactas.

Pretende-se desenvolver a solução fundamental da equação do calor sobre variedades Riemannianas e algumas consequências, por exemplo, a existência da função de partição associada a uma variedade Riemanniana. Provaremos que, conhecida a função de partição de uma variedade Riemanniana (M, g) , então é possível conhecer $SPEC^{(p)}(M, g)$ para todo p . Todas as variedades são compactas e conexas.

O operador do calor sobre uma variedade Riemanniana (M, g) tem a forma

$$L = \Delta + \frac{\partial}{\partial t} \tag{1}$$

sobre o espaço das funções contínuas em $M \times \mathbb{R}_+^*$, de classe C^2 na primeira variável e C^1 na segunda.

3.1 DEFINIÇÃO: Chama-se *SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DO CALOR (SFEC)* a uma função K sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$, satisfazendo as seguintes três propriedades:

- (a) K é C^0 nas três variáveis, C^2 na segunda, e C^1 na terceira.
- (b) $L_2 K = 0$, onde $L_2 = \Delta_2 + \frac{\partial}{\partial t}$, Δ_2 é o Laplaciano sobre a segunda variável.
- (c) $\lim_{t \rightarrow 0_+} K(x, \cdot, t) = \delta_x$, a medida de Dirac em x .

A propriedade 3.1 (c) significa que para qualquer h em $C^\infty(M)$, vale

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_M K(x, y, t) h(y) dV_g(y) = h(x).$$

Para (\mathbb{R}^n, g_0) uma SFEC é

$$K(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} \quad (2)$$

onde $r = d(x, y)$, (Ver por exemplo, Lócio e Lócio [I-II], pág. 186).

No caso de variedades Riemannianas (conexas e compactas), a função dada em (2) não é uma SFEC. No entanto demonstra-se que existe uma única SFEC que quando $t \rightarrow 0_+$, tem um desenvolvimento assintótico da seguinte forma:

$$K \underset{t \rightarrow 0_+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} (\mu_0 + \mu_1 t + \dots + \mu_k t^k + \dots) \quad (3)$$

onde os $\mu_k \in C^\infty(M \times M)$ são invariantes Riemannianos.

Agora, seja $\{\varphi_i\}$ um sistema ortonormal de $C^\infty(M)$ formado por funções próprias do Δ , e tome, analogamente ao caso euclidiano

$$K(x, y, t) = \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (4)$$

Supondo que a convergência da série é uniforme, temos

$$\begin{aligned} \Delta_2 K &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \Delta \varphi_i(y) \\ &= \sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} K = \sum_i -\lambda_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

Logo $L_2 K = (\Delta_2 + \partial/\partial t)K = 0$. Agora seja ψ uma função de $C^\infty(M)$. Então

$$\begin{aligned} \int_M K(x, y, t) \psi(y) V_s(y) &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \int_M \varphi_i(y) \psi(y) V_s(y) \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \langle \varphi_i, \psi \rangle_0 \end{aligned}$$

Quando $t \rightarrow 0_+$ tem-se

$$\int_M K(x, y, t) \psi(y) V_s(y) \xrightarrow{t \rightarrow 0_+} \sum_i \langle \varphi_i, \psi \rangle_0 \varphi_i(x) = \psi(x)$$

Portanto, sob a hipótese da existência de derivação, integração e passagem ao limite termo a termo, K será uma SFEC. Mais adiante mostramos que tudo isto pode ser feito.

UNICIDADE DA SFEC

3.2 PROPOSIÇÃO: Se existe uma SFEC para (M, g) , seja ela $K(x, y, t)$, então a série

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \quad (5)$$

é convergente sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ com soma $K(x, y, t)$.

PROVA: Considere a decomposição de $K(x, \cdot, t)$ segundo os φ_i para x e t fixos:

$$K(x, \cdot, t) = \sum_i f_i(x, t) \varphi_i \quad (6)$$

como K é C^2 na 2ª variável, a convergência é uniforme em y onde

$$f_i(x, t) = \langle K, \varphi_i \rangle_0 = \int_M K(x, y, t) \varphi_i(y) V_s(y)$$

$K(x, y, t)$ é de classe C^1 em t , e M é compacta; $f_i(x, t)$ é diferenciável em t e pode-se derivar sob o sinal de integração

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \int_M \frac{\partial K(x, y, t)}{\partial t} \varphi_i(y) V_s(y) = \left\langle \frac{\partial K}{\partial t}, \varphi_i \right\rangle_0 = \langle -\Delta_2 K, \varphi_i \rangle_0$$

Mas

$$\langle \Delta_2 K, \varphi_i \rangle_0 = \langle K, \Delta \varphi_i \rangle_0 = \lambda_i \langle K, \varphi_i \rangle_0 = \lambda_i f_i$$

Portanto

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = -\lambda_i f_i.$$

Resulta então

$$f_i(x, t) = k_i(x) e^{-\lambda_i t}. \quad (7)$$

$k_i(x)$ determina-se fazendo $t \rightarrow 0_+ : f_i(x, t) \rightarrow \varphi_i(x)$ por 3.1(c), e por (7) $k_i(x) = \varphi_i(x)$. Substituindo-se este valor em (7) e logo em (6) obtemos:

$$K(x, y, t) = \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

em média quadrática, para x e t fixos. Então existe uma sequência $\{i_k\}_{k=0,1,\dots}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{i_k} e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

converge simplesmente para $K(x, y, t)$ para todo x e t , e para quase todo y (Ver por exemplo, Folland [FD], pag. 60).

Por outro lado, usando a identidade de Parseval

$$\begin{aligned} \langle K(x, \cdot, t/2), K(y, \cdot, t/2) \rangle_0 &= \sum_i e^{-\lambda_i(t/2)} \varphi_i(x) e^{-\lambda_i(t/2)} \varphi_i(y) \\ &= \sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y) \end{aligned}$$

Então a série $\sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ converge simplesmente sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$ e seu limite é contínuo.

Portanto $\sum_i e^{-\lambda_i t} \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ converge simplesmente sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$, e seu limite é $K(x, y, t)$, o que estabelece a proposição 3.3.

EXISTÊNCIA DA SFEC

Seja $\varepsilon > 0$ (fixo) tal que para todo $x \in M$, a bola de centro x e raio $\varepsilon > 0$ seja uma vizinhança normal convexa de x (Ver por exemplo, Do Carmo [DC], pag. 75-77).

Ponha

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) < \varepsilon\}$$

então a função $e^{-r^2/4t}$ com $r = d(x, y)$ é C^∞ sobre U_ε .

Considere a função C^∞ sobre $U_\varepsilon \times \mathbb{R}_+^*$ definida por

$$S = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} (u_0 + u_1 t + \dots + u_k t^k) \quad (8)$$

onde u_0, u_1, \dots, u_k são funções C^∞ em U_ε , $k > 0$.

Calcule $L_2 S$, para isso ponha $G = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t}$, então

$$\frac{\partial S}{\partial t} = G \left[\left(-\frac{n}{2t} + \frac{r^2}{4t^2} \right) (u_0 + u_1 t + \dots + u_k t^k) + u_1 + \dots + k t^{k-1} u_k \right]. \quad (9)$$

Por outro lado

$$\Delta_2 S = (\Delta_2 G)(u_0 + u_1 t + \dots + u_k t^k) - 2 \langle d_2 G, d_2 u_0 + \dots + t^k d_2 u_k \rangle + G(\Delta_2 u_0 + \dots + t^k \Delta_2 u_k), \quad (10)$$

e se $\theta' = \partial \theta / \partial r$:

$$\Delta_2 G = -\frac{d^2 G}{dr^2} - \frac{dG}{dr} \left(\frac{\theta'}{\theta} + \frac{n-1}{r} \right) = \left(\frac{n}{2t} - \frac{r^2}{4t^2} \right) G + \left(\frac{r}{2t} \right) \frac{\theta'}{\theta} G. \quad (11)$$

Deve-se entender que se G é uma função de x e y a notação $\partial G / \partial r$ designa a derivada radial de G com respeito a y , onde x está fixo.

$$\begin{aligned} \langle d_2 G, d_2 u_0 + \dots + t^k d_2 u_k \rangle &= \frac{dG}{dr} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{r}{2t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) G. \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, de (9), (10), (11) e (12) obtemos

$$L_2 S = (\Delta_2 + \frac{\partial}{\partial t}) S = G \left[u_1 + 2tu_2 + \dots + kt^{k-1}u_k + \frac{r}{2t} \frac{\theta'}{\theta} (u_0 + u_1 t + \dots + u_k t^k) + \right. \\ \left. \frac{r}{t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \dots + t^k \frac{\partial u_k}{\partial r} \right) + \Delta_2 u_0 + \dots + t^k \Delta_2 u_k \right]. \quad (13)$$

Essa expressão é de ordem $t^{-n/2-1}$. Desejamos determinar os u_i 's de tal maneira que

$$L_2 S = (4\pi)^{-n/2} t^{k-n/2} e^{-r^2/4t} \Delta_2 u_k. \quad (14)$$

Primeiro observe que os coeficientes de $t^{-n/2-1}, \dots, t^{k-n/2-1}$ são:

$$r \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{r}{2} \frac{\theta'}{\theta} u_0, r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\theta'}{\theta} + 1 \right) u_1 + \Delta_2 u_0, \dots, r \frac{\partial u_k}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\theta'}{\theta} + k \right) u_k + \Delta_2 u_{k-1}$$

Agora, determinamos os u_i 's de tal maneira que todos os coeficientes sejam nulos. A determinação faz-se por recorrência. A primeira equação escreve-se como

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta}$$

Donde $u_0 = k\theta^{-1/2}$ com k uma função arbitrária de coordenadas angulares de centro x . {Veremos que mais adiante a constante k será tomada igual a 1}.

Note que u_0 é C^∞ sobre U_ϵ . Suponha que foram obtidos u_0, \dots, u_{i-1} , satisfazendo as i primeiras equações e que são C^∞ . Então deve-se determinar u_i na $(i+1)$ -ésima equação

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{i}{r} \right) u_i = -\frac{1}{r} \Delta_2 u_{i-1} \quad (15)$$

Observe que a solução da equação sem segundo membro, isto é,

$$\frac{\partial u_i}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta} + \frac{i}{r} \right) u_i = 0$$

é de forma $u_i = kr^{-i}\theta^{-1/2}$, onde k é uma função arbitrária de parâmetros angulares. Usando o método de variação da constante, acha-se um u_i da forma $kr^{-i}\theta^{-1/2}$ onde k depende de r . Daí

$$\frac{\partial k}{\partial r} = -\theta^{1/2} \Delta_2 u_{i-1} r^{i-1},$$

donde

$$k = \alpha - \int_0^r \theta^{1/2} \Delta_2 u_{i-1} s^{i-1} ds.$$

Entende-se que as integrais de $\theta^{1/2}$ e $\Delta_2 u_{i-1}$ são tomadas em (x, x_s) , onde x_s é o ponto da única geodésica que une x a x' , estando a um comprimento s de x .

Veja que $u_i(x, x)$ está definida e faz com que $k \rightarrow 0$ quando $x' \rightarrow x$. Então $\alpha = 0$.

Finalmente,

$$u_i(x, x') = -r^{-i} \theta^{-1/2} \int_0^r \theta^{1/2}(x, x_s) \Delta_2 u_{i-1}(x, x_s) s^{i-1} ds. \quad (16)$$

Para acabar a recorrência, é suficiente mostrar que u_i é de classe C^∞ . Ponha na integral $s = \tau r$. E observe que $x_s = \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(x'))$. Daí

$$u_i(x, x') = \theta^{-1/2}(x, x') \int_0^1 \theta^{1/2}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(x'))) \Delta_2 u_{i-1}(x, \exp_x(\tau \exp_x^{-1}(x'))) \tau^{i-1} d\tau.$$

A função u_i é de classe C^∞ , pois as aplicações θ , $\Delta_2 u_{i-1}$, \exp , \exp^{-1} , são C^∞ . Assim (16) é solução de (15) e (14) fica bem determinado.

Designe por S_k a função $(4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} (u_0 + tu_1 + \dots + t^k u_k)$ onde u_0, u_1, \dots, u_k foram determinados acima.

Essa função, S_k , não está definida fora de U_ε (bola normal de centro x e raio ε). Seja agora η uma função C^∞ , a valores em $[0, 1]$, igual a 1 sobre $U_{\varepsilon/4}$ e igual a zero sobre $M \times M - U_{\varepsilon/2}$. Ponha $H_k = \eta S_k$.

3.3 DEFINIÇÃO: Chama-se PARAMETRIX para o operador do calor L a toda função H satisfazendo as três propriedades seguintes:

- P.1 $H \in C^\infty(M \times M \times \mathbb{R}_+^*)$
- P.2 $L_2 H$ prolonga-se a uma função de $C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$
- P.3 $\lim_{t \rightarrow 0_+} H(x, \cdot, t) = \delta_x$ para todo $x \in M$.

3.4 LEMA: H_k é uma parametrix para o operador do calor L se $k > n/2$. Além disso, $L_2 H_k$ prolonga-se a uma função de $C^\ell(M \times M \times \mathbb{R}_+)$ para $k > \frac{n}{2} + \ell$. Também, se N é um espaço topológico, e f uma função contínua sobre $N \times M$, a convergência quando $t \rightarrow 0_+$ de

$$\int_M H_k(x, q, t) f(p, q) V_s(q)$$

a $f(p, x)$ é uniforme sobre os compactos de $N \times M$.

PROVA:

- P.1. É evidente pois $0 \notin \mathbb{R}_+^*$
- P.2. Tem-se $L_2 H_k = \eta(L_2 S_k) + (\Delta_2 \eta) S_k - 2\langle d_2 \eta, d_2 S_k \rangle$

(a) Sobre $(M \times M - \bar{U}_{\varepsilon/2}) \times \mathbb{R}_+^*$, $L_2 H_k = 0$. Pode-se prolongar por zero.

(b) Sobre $U_{\varepsilon/4} \times \mathbb{R}_+^*$, temos (Ver (14))

$$L_2 H_k = (4\pi)^{-n/2} t^{k-n/2} e^{r^2/4t} \Delta_2 u_k$$

As derivadas de ordem $0, 1, 2, \dots, \ell$ dessa função têm uma singularidade sobre $U_{\varepsilon/4} \times \{0\}$ em $t^{k-n/2-\ell}$. Daí para $k > \frac{n}{2} + \ell$ pode-se prolongar $L_2 H_k$ a uma função

contínua sobre $U_{\varepsilon/4} \times \mathbb{R}_+$, que toma o valor zero sobre $U_{\varepsilon/4} \times \{0\}$. Verifica-se que são diferenciáveis as funções assim obtidas, salvo talvez aquelas que provêm das derivadas de ordem ℓ , sobre $U_{\varepsilon/4} \times \{0\}$ e ali têm todas suas derivadas nulas. Então $L_2 H_k$ restrita a $U_{\varepsilon/4} \times \mathbb{R}_+$ prolonga-se a uma função de $C^\ell(U_{\varepsilon/4} \times \mathbb{R}_+)$.

(c) Sobre $(U_\varepsilon - \overline{U}_{\varepsilon'}) \times \mathbb{R}_+^*$, com $0 < \varepsilon' < \varepsilon/4$, tem-se

$$L_2 H_k = (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} \varphi_k \text{ com } \varphi_k \in C^\infty(U_\varepsilon - \overline{U}_{\varepsilon'}) \times \mathbb{R}_+,$$

usando o fato que se r é maior que ε' , $e^{-r^2/4t}$ impõe limite zero a toda função dependendo de t ; tem-se pelo mesmo argumento que em (b), $L_2 H_k$ restrito a $(U_\varepsilon - \overline{U}_{\varepsilon'}) \times \mathbb{R}_+^*$ prolonga-se a uma função de $C^\ell((U_\varepsilon - \overline{U}_{\varepsilon'}) \times \mathbb{R}_+)$ se $k > n/2 + \ell$.

De (a), (b) e (c), $L_2 H_k$ prolonga-se a uma função de $C^\ell(M \times M \times \mathbb{R}_+)$ que toma o valor zero sobre $M \times M \times \{0\}$.

P.3. Agora, mostra-se que para todo $f \in C^0(N \times M)$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_M (4\pi t)^{-n/2} \eta(x, q) e^{-r^2/4t} (u_0(x, q) + \dots + t^k u_k(x, q)) f(p, q) V_g(q) = f(p, x)$$

localmente uniforme sobre $N \times M$. Esse limite é igual também a

$$\sum_{i=0}^k \lim_{t \rightarrow 0_+} t^i \int_M (4\pi t)^{-n/2} \eta(x, q) e^{-r^2/4t} u_i(x, q) f(p, q) V_g(q)$$

Seja $B(x, \rho)$ a bola de centro x e raio $\rho > 0$, $r > \rho$. Tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0_+} \int_M (4\pi t)^{-n/2} \eta(x, q) e^{-r^2/4t} u_i(x, q) f(p, q) V_g(q) = \\ \lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{B(x, \rho)} (4\pi t)^{-n/2} \eta(x, q) e^{-r^2/4t} u_i(x, q) f(p, q) V_g(q) \end{aligned}$$

já que a integral sobre $M - B(x, \rho)$ tende uniformemente a zero por causa de $e^{-r^2/4t}$, $r > \rho$. E assim a convergência dessa integral vai para zero, uniformemente sobre os compactos de $N \times M$.

Seja $B(0, \rho)$ a bola de centro na origem e raio ρ em $T_x M$. Então a última integral é igual a

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{B(0, \rho)} (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} u_i(x, \exp_x y) f(p, \exp_x y) \theta(x, y) dy =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{T_x M} (4\pi t)^{-n/2} e^{-r^2/4t} \tilde{u}_i(x, \exp_x y) \tilde{f}(p, \exp_x y) \tilde{\theta}(x, y) dy$$

onde o sinal \sim aplicado a uma função sobre $B(0, \rho)$ designa que essa função prolonga-se para zero fora de $B(0, \rho)$. O limite é então

$$\tilde{u}_i(x, \exp_x(0)) \tilde{f}(p, \exp_x(0)) \tilde{\theta}(x, 0) = u_i(x, x) f(p, x)$$

e é localmente uniforme sobre $N \times M$.

Como sabemos que $u_0 = k\theta^{-1/2}$, é necessário que $k = 1$ para que

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_M (4\pi t)^{-n/2} \eta(x, q) e^{-r^2/4t} (u_0(x, q) + \dots + t^k u_k(x, q)) f(p, q) V_g(q)$$

$$= u_0(x, x) f(p, x) + \sum_{i=1}^k (0) u_i(x, x) f(p, x) = f(p, x).$$

Localmente uniforme sobre $N \times M$. Isso estabelece o Lema 3.4.

3.5 OBSERVAÇÃO: Verifica-se facilmente que o resultado demonstrado no número P.3. aplica-se também à função $H_k(0, x, t)$.

3.6 DEFINIÇÃO: Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, $A, B \in C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$. Definimos a convolução de A e B por

$$A * B(x, p, t) = \int_0^t \left[\int_M A(x, q, \theta) B(q, p, t - \theta) V_g(q) \right] d\theta \quad (17)$$

É imediato que a função obtida pertence então a $C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$. Observe que o produto $*$ é associativo. Também ponha

$$A^{*\lambda} = A * A * \dots * A (\lambda \text{ vezes})$$

3.7 LEMA: Se $K_k = L_2 H_k$, a função $Q_k = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$ existe para $k > n/2$ e esta em $C^l(M \times M \times \mathbb{R}_+)$ para $k > n/2 + l$. Além disso, tem-se um majorante da forma $|Q_k| < C t^{k-n/2}$ numa vizinhança de $t = 0$ e para alguma constante $C > 0$.

PROVA: Pela parte P.2(b) da demonstração do Lema 3.4 tem-se $|L_2 H_k| \leq A t^{k-n/2}$ onde A é alguma constante, para $0 \leq t \leq T, T$ fixo. Tem-se então

$$|L_2 H_k| \leq A T^{k-n/2} = B. \quad (18)$$

Mostra-se então por recorrência que

$$|K_k^{*\lambda}| \leq \frac{A \cdot B^{\lambda-1} V^{\lambda-1} t^{k-n/2+\lambda-1}}{(k-n/2+1) \dots (k-n/2+\lambda-1)} \quad (19)$$

onde $V = \text{vol}(M, g)$. De fato, para $\lambda = 1$

$$|K_k^{*1}| = |K_k| = |L_2 H_k| < A t^{k-n/2}$$

que é exatamente (19). Suponha que (19) vale para $\lambda - 1$ então

$$\begin{aligned} |K_k^{*\lambda}| &\leq \int_0^t \left[\int_M |K_k^{*(\lambda-1)}(\theta)| |K_k(t-\theta)| V_\theta \right] d\theta \\ &\leq \int_0^t \left[\int_M \frac{A \cdot B^{\lambda-2} V^{\lambda-2} \theta^{k-n/2+\lambda-2} \cdot B}{(k-n/2+1) \dots (k-n/2+\lambda-2)} V_\theta \right] d\theta \\ &= \frac{A \cdot B^{\lambda-1} V^{\lambda-1}}{(k-n/2+1) \dots (k-n/2+\lambda-2)} \int_0^t \theta^{k-n/2+\lambda-2} d\theta \\ &= \frac{A \cdot B^{\lambda-1} V^{\lambda-1} t^{k-n/2+\lambda-1}}{(k-n/2+1) \dots (k-n/2+\lambda-1)}. \end{aligned}$$

A série majorante é do tipo exponencial e portanto convergente. Daí segue que a série

$$Q_k = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda}$$

é uniformemente convergente sobre $M \times M \times [0, T]$ e seu limite está então em $C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$. Por outro lado, ponha

$$C = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A \cdot B^{\lambda-1} V^{\lambda-1} T^{\lambda-1}}{(k - n/2 + 1) \dots (k - n/2 + \lambda - 1)}.$$

Logo $|Q_k| \leq C t^{k-n/2}$ como queríamos.

De maneira análoga tem-se os majorante para $|D^S K_k^{\ast\lambda}|$ onde S é um multi-índice de derivação de ordem $\leq \ell$ com $k > n/2 + \ell$. Daí deduz-se que as séries

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} D^S K_k^{\ast\lambda}$$

convergem uniformemente para os $D^S Q_k$.

3.8 LEMA: Para todo $P \in C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$, a função $P \ast H_k$ definida pela fórmula (17) existe e está em $C^0(M \times M \times \mathbb{R}_+)$ para $k > n/2 + \ell$. Ela é de classe C^ℓ na segunda variável para $k > n/2 + \ell$. Também, sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+$,

$$L_2(P \ast H_k) = P + P \ast H_k \quad (k > n/2 + 2).$$

PROVA: Tem-se

$$P \ast H_k(x, p, t) = \int_0^t \left[\int_M P(x, q, \theta) H_k(q, p, t - \theta) V_g(q) \right] d\theta$$

Ponha

$$\varphi(x, p, t, \theta) = \int_M P(x, q, \theta) H_k(q, p, t - \theta) V_g(q) \quad (20)$$

A função $\varphi(x, p, t, 0)$ está definida sobre $[0, t]$. Para saber se ela é integrável sobre $[0, t]$, estuda-se o comportamento quando $\theta \rightarrow t$. Melhor, mostramos que φ , definida e contínua sobre $\{(x, p, t, \theta) \in M \times M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ / \theta < t\}$, estende-se a uma função contínua sobre $\{(x, p, t, \theta) \in M \times M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \theta \leq t\}$ e tem-se $\varphi(x, p, t, t) = P(x, p, t)$. O problema de continuidade está em $\theta = t = t_0$.

Suponha que t, θ ficam no bordo de $[0, T]$. Ponha $\tau = t - \theta$. Pretende-se demonstrar a continuidade para $\tau = 0, \theta = 0$, da função $\varphi(m, p, \theta, \tau)$. Para ver isso aplique o Lema 3.4 com $N = M \times [0, T]$. Da continuidade de φ tem-se então que a função $P * H_k$ está definida sobre $M \times M \times \mathbb{R}_+$ e é contínua.

A classe C^ℓ na segunda variável para $k > n/2 + \ell$ estabelece-se por procedimento análogo, daí mostra-se que para todo índice de derivação s de ordem $\leq \ell$ a função

$$\varphi^s(x, p, t, \theta) = \int_M P(x, q, \theta) D_2^s H_k(q, p, t - \theta) V_s(q)$$

estende-se a uma função contínua sobre $\{(x, p, t, \theta) \in M \times M \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \theta \leq t\}$. Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \Delta_2(P * H_k) &= \Delta_2 \int_0^t \left[\int_M P(x, q, \theta) H_k(q, p, t - \theta) V_s(q) \right] d\theta \\ &= \int_0^t \left[\int_M P(x, q, \theta) \Delta_2 H_k(q, p, t - \theta) V_s(q) \right] d\theta \\ &= P * \Delta_2 H_k \end{aligned}$$

e também

$$\frac{\partial}{\partial t}(P * H_k)(x, q, t) = \varphi(x, p, t, t) + P * \frac{\partial H_k}{\partial t}(x, p, t)$$

Portanto

$$L_2(P * H_k) = P + P * H_k$$

3.9 TEOREMA:

$K = H_k - Q_k * H_k$ é uma SFEC se $k > \frac{n}{2} + 2$.

PROVA:

(a) É claro que K satisfaz 3.1(a), pois H_k e $Q_k * H_k$ satisfazem 3.1(a).

(b) Pelo Lema 3.8 tem-se:

$$L_2 K = L_2(H_k - Q_k * H_k) = K_k - (Q_k + Q_k * K_k)$$

e pela definição de Q_k

$$L_2 K = K_k - \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda+1} K_k^{*\lambda} - Q_k * K_k = Q_k * K_k - Q_k * K_k = 0$$

(c) Para $f \in C^0(M)$

$$\int_M K(m, q, t) f(q) V_g(q) = \int_M H_k(m, q, t) f(q) V_g(q) - \int_M (Q_k * H_k)(m, q, t) f(q) V_g(q)$$

Pelo Lema 3.4 o primeiro somando do lado direito tende a $f(q)$ quando t tende a zero. O segundo termo desse mesmo lado tende a zero, pois pelo Lema 3.7 para todo t em uma vizinhança de zero.

$$\frac{Q_k}{t^{k-n/2}} = R_k$$

está limitado. Então

$$\int_M Q_k * H_k(m, q, t) f(q) V_g(q) = t^{k-n/2} \int_M (R_k * H_k)(m, q, t) f(q) V_g(q)$$

que tende a zero quando t vai para zero. Isto mostra o Teorema 3.9.

3.10 COROLÁRIO: Tem-se o seguinte desenvolvimento assintótico

$$K(x, x, t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} (u_0(x, x) + t u_1(x, x) + \dots + t^k u_k(x, x) + \dots)$$

PROVA: Pelo Teorema de Unicidade da SFEC (ver 3.2) $H_k - Q_k * H_k$ define a mesma função K para todo k . Por outro lado, como $|Q_k| \leq C t^{k+1-n/2}$, então

$$(4\pi t)^{n/2} (Q_{k+1} * H_{k+1}) = o(t^{k+1})$$

Também

$$(4\pi t)^{n/2} H_k(x, x) = u_0(x, x) + t u_1(x, x) + \dots + t^k u_k(x, x)$$

Portanto

$$(4\pi t)^{n/2} K(x, x) = u_0(x, x) + t u_1(x, x) + \dots + t^k u_k(x, x) + o(t^{k+1}).$$

o que mostra o Corolário.

FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Um conceito útil em Geometria Espectral é o conceito de função de partição associada a uma variedade Riemanniana. Como veremos mais adiante o espectro de uma variedade Riemanniana fica determinado quando se conhece sua função de partição.

3.11 DEFINIÇÃO: (FUNÇÃO PARTIÇÃO). Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, compacta e conexa. Chama-se função de partição de (M, g) , notada por $Z(M, g, t)$ ou $Z(t)$ à função definida para todo $t > 0$ por

$$Z(M, g, t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}$$

onde $\lambda_i \in \text{Spec}^k(M, g)$ m_i é sua multiplicidade, e $\lambda_0 = 0$.

3.12 TEOREMA: Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, compacta e convexa. Então

(a) Se $K(x, y, t)$ é a SFEC associada a (M, g) tem-se

$$\int_M K(x, x, t) = Z(t),$$

isto é, a função de partição associada com (M, g) existe para $t > 0$;

(b) $Z(t)$ tem o seguinte desenvolvimento assintótico

$$Z(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} (a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + \dots)$$

onde

$$a_k = \int_M u_k(x, x) V_g(x).$$

PROVA:

(a) Sabe-se que a SFEC, $K(x, y, t)$, associada a uma variedade Riemanniana existe e é única (Proposição 3.2 e Teorema 3.9). Daí tem-se que para todo $x \in M$, a série

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} (\varphi_i(x))^2$$

converge para $K(x, x, t)$ com termos positivos, onde $\{\varphi_i\}$ é uma base ortonormal de $C^\infty(M)$ formada de funções próprias de Δ . E pelo Teorema de Convergência Monótona:

$$\int_M K(x, x, t) V_g(t) = \sum_i e^{-\lambda_i t} \int_M [\varphi_i(x)]^2 V_g(x) = Z(t).$$

Isto mostra (a)

(b) segue diretamente de (a) e do Corolário 3.10.

3.13 OBSERVAÇÕES:

(a) Na demonstração do Lema 3.4 se pede que $u_0(x, y) = [\theta(x, y)]^{-1/2}$ donde $u_0(x, x) = 1$ e portanto

$$a_0 = \text{Vol } (M, g),$$

ou seja, o espectro de uma variedade Riemanniana caracteriza seu volume. O cálculo de a_1 e a_2 , pode-se ver [B - G - M] Capítulo E. IV.

(b) A função $Z(t)$ é contínua no intervalo $(0, +\infty)$ pois $K(x, y, t)$ o é em $M \times M \times \mathbb{R}_+^*$.

(c) A série

$$\sum_i e^{-\lambda_i t}$$

dada em 3.12, contando multiplicidade, converge uniformemente em $[t_0, +\infty)$ para cada $t_0 > 0$.

(d) $\lim_{t \rightarrow 0+} Z(t) = +\infty$, e, $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 1$

(e) $Z(t) = Z(M, g, t)$ determina o espectro de (M, g) . De fato, para $\mu > 0$ forme $e^{\mu t} Z(t)$.

Se $\mu < \lambda_1$, então

$$e^{\mu t} Z(t) = e^{\mu t} + \sum_{i>0} m_i e^{(\mu - \lambda_i)t}$$

e quando $t \rightarrow \infty$

$$e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \rightarrow 0 \quad (21)$$

Se $\mu = \lambda_1$,

$$e^{\mu t} Z(t) = e^{\mu t} + m_1 + \sum_{i>1} m_i e^{(\mu - \lambda_i)t}$$

e quando $t \rightarrow \infty$

$$e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \rightarrow m_1 \quad (22)$$

Em fim, se $\mu > \lambda_1$

$$e^{\mu t} Z(t) = e^{\mu t} + m_1 e^{(\mu - \lambda_1)t} + \sum_{i>1} m_i e^{(\mu - \lambda_i)t}$$

e se $t \rightarrow \infty$

$$e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t} \longrightarrow \infty. \quad (23)$$

Então de (21), (22) e (23), λ_1 é o único μ tal que $e^{\mu t} Z(t) - e^{\mu t}$ tem limite finito > 0 quando $t \rightarrow \infty$ e esse limite é m_1 . Recorrentemente λ_i é o único μ tal que

$$e^{\mu t} Z(t) - \sum_{j=0}^{i-1} e^{(\mu - \lambda_j)t}$$

tem limite finito > 0 quando $t \rightarrow \infty$ e esse limite é m_i .

3.14 PROPOSIÇÃO: Sejam $K(a, b)$ e $K(a', b')$ duas garrafas de Klein. Se

$$\text{Spec}(K(a, b)) = \text{Spec}(K(a', b'))$$

então

$$K(a, b) = K(a', b')$$

PROVA: É suficiente mostrar que se $\text{Spec}(K(a, b))$ é conhecido, a e b são conhecidos. Logo b é conhecido por quando que os valores próprios de multiplicidade ímpar são da forma $4\pi^2 n^2 / b^2$ (ver Proposição 2.18).

Por outro lado a área, $ab/2$, é determinada pelo espectro, ver 3.13(a). Então a é conhecido.

CAPÍTULO 4

VARIEDADES RIEMANNIANAS ISOESPECTRAIS

INTRODUÇÃO

Lembre que uma estrutura Riemanniana sobre uma variedade diferenciável M é uma classe de equivalência de métricas Riemannianas isométricas; e duas variedades Riemannianas (M, g) e (N, h) são $\Delta^{(p)}$ -isoespectrais se

$$Spec^{(p)}(M, g) = Spec^{(p)}(N, h)$$

relativo ao operador Laplaciano para as p -formas diferenciáveis $\Omega^p(M)$.

Daí, duas variedades Riemannianas isométricas são $\Delta^{(p)}$ -isoespectrais para todo p . Deseja-se apresentar um método para obter variedades Riemannianas isoespectrais (não isométricas) reduzindo parte da construção a um problema de Grupos Finitos (ver também, Sunada [SA], Buser [BR2], Brook [BK2], Berard [BR1], [BR4], [BR5] etc.).

UMA CONDIÇÃO DE QUASE CONJUGAÇÃO

4.1 DEFINIÇÃO: Dado um grupo finito G e dois sub-grupos H_1 e H_2 de G introduz-se a condição

$$(QC). \left\{ \begin{array}{l} H_1 \text{ e } H_2 \text{ não são conjugados, e} \\ \forall g \in G \quad \#([g] \cap H_1) = \#([g] \cap H_2). \end{array} \right\}$$

onde $[g]$ denota a classe de conjugação de $g \in G$ e $\#$ significa o número de elementos, neste caso diz-se que a tripla $(G; H_1, H_2)$ satisfaz a condição (QC) , e que os subgrupos H_1 e H_2 de G são QUASE CONJUGADOS.

EXEMPLO 1: Sejam os grupos \mathbb{Z}_8 e $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ com a soma e produto entre classes de equivalência módulo 8 respectivamente. E considere o produto semidireto^(*) dado por

$$G = \mathbb{Z}_8^* \ltimes_{\theta} \mathbb{Z}_8$$

onde θ é o homomorfismo dado por

$$\begin{array}{ccc} \theta : \mathbb{Z}_8^* & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_8^* \\ r & \longrightarrow & r \end{array}$$

ou seja, o produto em G é dado por

$$(a, x)(b, y) = (ab, x + \theta(a)y) = (ab, x + ay)$$

Sejam os subgrupos de G :

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(1, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 0)\}, \\ H_2 &= \{(1, 0), (3, 4), (5, 4), (7, 0)\} \end{aligned}$$

(a) H_1 e H_2 NÃO SÃO CONJUGADOS. De fato, suponha que H_1 e H_2 são conjugados, isto é existe $(a, x) \in G$ tal que

$$H_2 = (a, x)H_1(a, x)^{-1}.$$

(*) Para olhar a teoria de produto semidireto, ver por exemplo, Rotman [RN] pág. 136.

Ponha $(r, 0) \in H_1$ e observe que

$$\begin{aligned}
 (a, x)(r, 0)(a, x)^{-1} &= (ar, x)(a, x)^{-1} \\
 &= (ar, x)(a, y) \text{ com } x + a_y = 0, \\
 &= (ar, x)(a, y) \text{ com } x + a_y = 0, \\
 &= (r, x - rx)
 \end{aligned}$$

Logo, se H_1 e H_2 são conjugados, cada elemento de H_1 deve gerar um elemento de H_2 . Mas $(3, 0)$ e $(5, 0)$ não geram nenhum elemento de H_2 , pois para que

$$(3, x - 3x) \in H_2 \text{ e } (5, x - 5x) \in H_2$$

deve ter-se

$$6x = 4 \text{ e } 4x = 4$$

no primeiro caso x pode tomar os valores 2 ou 6 e no segundo caso 1, 3, 5, 7 portanto não existe $x \in \mathbb{Z}_8^*$ satisfazendo as duas equações anteriores.

(b) PARA TODO $g \in G$, $\#([g] \cap H_1) = \#([g] \cap H_2)$. De fato para todo $(r, 0)$ em H_1 , $[(r, 0)] = \{(r, x - rx) : x \in \mathbb{Z}_8\}$. Portanto

$$\begin{aligned}
 [(1, 0)] &= \{(1, 0)\} \\
 [(3, 0)] &= \{(3, 0), (3, 6), (3, 4), (3, 2)\} \\
 [(5, 0)] &= \{(5, 0), (5, 4)\} \\
 [(7, 0)] &= \{(7, 0), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}
 \end{aligned}$$

Observe que

$$\#([(r, 0)] \cap H_1) = 1 = \#([(r, 0)] \cap H_2)$$

e nos outros casos

$$\#([(r, x)] \cap H_1) = 0 = \#([(r, x)] \cap H_2)$$

(a) e (b) mostram que H_1 e H_2 satisfazem a condição (QC) dada em 3.15.

EXEMPLO 2: Para n um inteiro ≥ 1 e p -primo, considere

$$\begin{aligned}
SL(n, \mathbb{Z}_p) &= \{(a_{ij})_{n \times n} : a_{ij} \in \mathbb{Z}_p \text{ e } \det(a_{ij})_{n \times n} = 1\} \\
GL(n, \mathbb{Z}_p) &= \{(a_{ij})_{n \times n} : a_{ij} \in \mathbb{Z}_p \text{ e } \det(a_{ij})_{n \times n} \neq 0\}
\end{aligned}$$

com o produto entre matrizes $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ é um grupo e $SL(n, \mathbb{Z}_p)$ um subgrupo de $GL(n, \mathbb{Z}_p)$. Sejam os seguintes subgrupos de $SL(n, \mathbb{Z}_p)$.

$$H_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} : * \in \mathbb{Z}_p, \det A = 1 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix} : * \in \mathbb{Z}_p, \det A = 1 \right\}$$

AFIRMAÇÕES: Para todo $x, y \in SL(n, \mathbb{Z}_p)$,

- (a) $x \in H_1 \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$;
- (b) $x^{-1}yx \in H_1 \Leftrightarrow$ a primeira coluna de x é autovetor de y associado ao autovalor um ;
- (c) $xH_1 = yH_1 \Leftrightarrow$ a primeira coluna de x e y são iguais e não nulas ;
- (d) $o(SL(n, \mathbb{Z}_p)) = (p^n - 1)p^{n-1}o(SL(n-1, \mathbb{Z}_p))$;
- (e) $o(GL(n, \mathbb{Z}_p)) = (p^n - 1)p^{n-1}o(GL(n-1, \mathbb{Z}_p))$.

PROVA: Se $x, y \in SL(n, \mathbb{Z}_p)$ e $x = (x_{ij})_{n \times n}, y = (y_{ij})_{n \times n}$:

(a)

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \in H_1$$

(b)

$$x^{-1}yx \in H_1 \Leftrightarrow yx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} xH_1 = yH_1 &\Leftrightarrow x^{-1}y \in H_1 \Leftrightarrow x^{-1}y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Como $o(SL(n, \mathbb{Z}_p))$ é finito e $H_1 \leq SL(n, \mathbb{Z}_p)$, o Teorema de Lagrange garante que:

$$o(SL(n, \mathbb{Z}_p)) = o(H_1) \cdot t$$

onde t é o índice de H_1 em $SL(n, \mathbb{Z}_p)$. Também observe que:

$$o(H_1) = p^{n-1}o(SL(n-1, \mathbb{Z}_p)) \quad (1)$$

Como existem $p^n - 1$ matrizes de $SL(n, \mathbb{Z}_p)$ com a primeira coluna diferente das duas e não nula então da afirmação (c) tem-se $t = p^n - 1$, logo;

$$o(SL(n, \mathbb{Z}_p)) = (p^n - 1)p^{n-1}o(SL(n-1, \mathbb{Z}_p)).$$

A prova de (e) é similar passo a passo à parte (d).

Agora, observe que $o(SL(1, \mathbb{Z}_p)) = 1$ e $o(GL(1, \mathbb{Z}_p)) = p - 1$ para todo p -primo. Também

Quando $p = 2$

$$\begin{aligned} o(SL(2, \mathbb{Z}_2)) &= 6, \quad o(SL(3, \mathbb{Z}_2)) = 168 \\ o(SL(4, \mathbb{Z}_2)) &= 20.160 \end{aligned}$$

Quando $p = 3$

$$o(SL(3, \mathbb{Z}_3)) = 5516 \text{ e } o(H_1) = 216$$

H_1 e H_2 NÃO SÃO CONJUGADOS EM $SL(n, \mathbb{Z}_p)$. De fato, suponha que H_1 e H_2 são conjugados, isto é, existe $x \in SL(n, \mathbb{Z}_p)$ tal que

$$H_1 = x^{-1}H_2x.$$

Pela afirmação (b) deste exemplo, para todo $h \in H_2$ a primeira coluna de x é um autovetor de h associado ao autovalor um. E veja que tudo isto reduz-se a uma contradição. De fato, se

$$h = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$h \in H_2$ e seus únicos autovetores são $(0 \dots 0 x_n)^t$ onde $x_n \in \mathbb{Z}_p$ e como x deve ser inversível, então x é da forma

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \\ x_n & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$x_n \neq 0$ e como $xH_1 = H_2x$ tem-se

$$xH_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \\ x_n & * & \dots & * \end{pmatrix} : x_n \neq 0, x_n, * \in \mathbb{Z}_p \right\} = H_2x$$

Mas, para

$$h' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$h' \in H_2$ e portanto $h'x$ deve gerar um elemento de xH_1 e como $h'x$ tem a forma

$$h'x = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ x_n & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & * & \dots & * \end{pmatrix} \in xH_1$$

então $(0 \ x_n \ \dots \ x_n)^t = (0 \ \dots \ 0 \ x_n)^t$ o que dá $x_n = 0$ que contradiz o fato que $x_n \neq 0$.

Isto mostra que H_1 e H_2 não são conjugados em $SL(n, \mathbb{Z}_p)$.

PARA TODO $y \in SL(n, \mathbb{Z}_p)$, $\#([y] \cap H_1) = \#([y] \cap H_2)$.

De fato, da afirmação (a) deste exercício tem-se que $\#([y] \cap H_1)$ só depende do número de autovetores que y tem associado com o autovalor um. Como y e y^t tem o mesmo número de autovetores associados ao mesmo autovalor, então

$$\#([y] \cap H_1) = \#([y] \cap H_2).$$

Tudo isto mostra que a tripla $(SL(n, \mathbb{Z}_p); H_1, H_2)$ satisfaz a condição de quase conjugação (QC).

Um resultado importante neste capítulo é o seguinte:

4.2 TEOREMA (SUNADA, 1985): Seja M uma variedade diferenciável com $\dim \geq 2$ e considere \mathcal{G}_M o conjunto das métricas Riemannianas g de M tal que

“Para qualquer par de conjuntos abertos e diferentes U e V de M não existe uma isometria de (U, g) sobre (V, g) ”

Então \mathcal{G}_M é um conjunto residual^(*) no espaço de todas as métricas com a topologia C^∞ .

PROVA: Escolha uma base $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ de conjuntos abertos em M tal que

“cada \overline{U}_i seja difeomorfo a um disco fechado em \mathbb{R}^n ”.

Seja \mathcal{G}_{ijk} o conjunto de métricas tal que existe uma isometria $\varphi : U_i \longrightarrow \overline{U}_k$ com

$$\varphi(U_i) \supset U_j.$$

Deseja-se mostrar que se $U_i \cap U_k = \emptyset$, então \mathcal{G}_{ijk}^C é aberto e denso com respeito a topologia C^∞ .

Note que

$$\bigcap_{\substack{(i,j,k) \\ U_i \cap U_k = \emptyset}} \mathcal{G}_{ijk}^C \subset \mathcal{G}_M.$$

\mathcal{G}_{ijk} É FECHADO. Seja g_0 na aderência de \mathcal{G}_{ijk} , então existe uma seqüência de métricas Riemannianas $\{g_n\}$ em M tal que $g_n \rightarrow g_0$, e portanto, seja

$$\varphi_n : (U_i, g_n) \longrightarrow (\overline{U}_k, g_n)$$

a isometria tal que $\varphi_n(U_i) \supset U_j$.

Agora denota-se por d_n e d_0 as funções distância sobre $U_i \cup U_k$ induzidas por g_n e g_0 respectivamente. Como $U_i \cup U_k$ é compacto existe uma constante $C > 1$ tal que

(*) Um subconjunto de um espaço topológico é residual se contém uma intersecção enumerável de subconjuntos abertos e densos. “Em particular, ele é denso” tem que ser feita com uma certa cautela.

$$C^{-1}d_n(x, y) \leq d_0(x, y) \leq Cd_n(x, y)$$

sobre $U_i \cup U_k$, tem-se

$$\begin{aligned} d_0(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) &\leq Cd_n(\varphi_n(x), \varphi_n(y)) \\ &= Cd_n(x, y) \\ &\leq C^2 d_0(x, y) \end{aligned}$$

o que mostra que $\{\varphi_n\}$ é equicontínua (e pontualmente limitada). Então pelo Teorema de Ascoli $\{\varphi_n\}$ é relativamente compacto, e portanto tem uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ convergente a alguma

$$\varphi_0 : U_i \longrightarrow \overline{U}_k.$$

Como $\{\varphi_{n_k}\}$ são isometrias e d_0 é contínua tem-se

$$d_0(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_0(\varphi_{n_k}(x), \varphi_{n_k}(y)) = d_0(x, y),$$

isto é φ_0 é uma isometria. Observe que $\varphi_0(U_i) \supseteq U_j$, onde deduz-se $g_0 \in \mathcal{G}_{ijk}$.

$\mathcal{G}_{ijk}^{\mathcal{C}}$ É DENSO. Deforma-se levemente uma métrica dada sobre U_j tal que, com respeito a qualquer nova métrica, U_j não é isométrico a nenhum subconjunto aberto em U_i . Isto é feito por meio do argumento “*ESPAÇOS JATOS*”. Da naturalidade do problema, pode-se assumir que U_i e U_j são discos abertos em \mathbb{R}^n com $U_i \cap U_j = \emptyset$ e $0 \in U_j$. Denote por \mathcal{D} o conjunto de todos os difeomorfismos locais φ de \mathbb{R}^n definidos ao redor da origem com $\varphi(0) = 0$. O conjunto $\mathcal{D}^{(k)}$ dos k -jatos de elementos em \mathcal{D} na origem é definido na forma usual. O conjunto de GÉRMENS^(*) de métricas diferenciáveis definidas ao redor da origem é denotado por \mathcal{G} , e por $\mathcal{G}^{(k)}$ o conjunto dos k -jatos de elementos em \mathcal{G} . Para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ (resp. $g \in \mathcal{G}$), denota-se por $\varphi^{(k)}$ o k -jatos de φ (resp. $g^{(k)}$ o k -jatos de g). Como $(\varphi^*g)^{(k)}$ depende somente de φ^{k+1} e $g^{(k)}$, pode-se definir uma ação de $\mathcal{D}^{(k+1)}$ sobre $\mathcal{G}^{(k)}$.

Dada uma métrica g sobre U_i , faça uma família diferenciável de gérmens de métricas $\{g(x)\}_{x \in U_i} \subset \mathcal{G}$ fazendo $g(x) = \varphi_x^*g$, onde $\varphi_x : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x)$ é a translação: $y \longrightarrow y + x$. Observe-se então que $\phi : x \longrightarrow g(x)^{(k)}$ é uma função diferenciável de U_i em $\mathcal{G}^{(k)}$. Por outro lado

(*) Ver, por exemplo, [WR] pag. 12.

$$\dim \mathcal{D}^{(k+1)} + \dim U_i = \sum_{i=1}^{k+1} n \binom{n+i-1}{i} + n = (n+k+1) \binom{n+k}{k+1}^{(*)}$$

$$\dim \mathcal{G}^{(k)} = \frac{n(n+1)}{2} \binom{n+k}{k}.$$

Daí, $\dim \mathcal{G}^{(k)} > \dim \mathcal{D}^{(k+1)} + \dim U_i$ sempre que $k \geq 4$. Isto implica que $\mathcal{D}^{(k+1)}(\phi(U_i))$ não contém um conjunto aberto em $\mathcal{G}^{(k)}$ para $k \geq 4$ (Pelo Teorema de Sard). Agora tome uma métrica g_1 sobre U_j , perto a uma métrica dada g , com a propriedade que g_1 coincide com g fora de uma pequena vizinhança da origem e o $g^{(k)}$ está em $\mathcal{G}^{(k)} - \mathcal{D}^{(k)}(\phi(U_i))$. Se (U, g_1) é isométrico a (V, g) para algum $V \subset U_i$, então deve existir algum $\varphi \in \mathcal{D}$ com $g_1 = \varphi^* g(x)$; assim $g_1^{(k)} = \varphi^{(k+1)} \cdot g(x)^{(k)}$ que contradiz a escolha de g_1 . Isto completa a prova do Teorema.

ISOESPECTRALIDADE

Considere M uma variedade fechada de dimensão ao menos dois. Suponha que G (grupo finito) AGE SEM PONTOS FIXOS sobre M . Se H_1 e H_2 são subgrupos de G , considere os recobrimentos

$$M_0 = M/G, M_i = M/H_i \quad (i = 1, 2)$$

Ponha em M_0 uma métrica Riemanniana g_0 , ela induz uma métrica g (resp. g_i) em M (resp. em M_i) de tal maneira que as projeções P_1 e P_2 induzidas por H_1 e H_2

(*) Para calcular a $\dim \mathcal{D}^{(k+1)}$ e $\dim \mathcal{G}^{(k)}$ use a fórmula para $d^k f(x; t)$ para uma função diferenciável de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} .

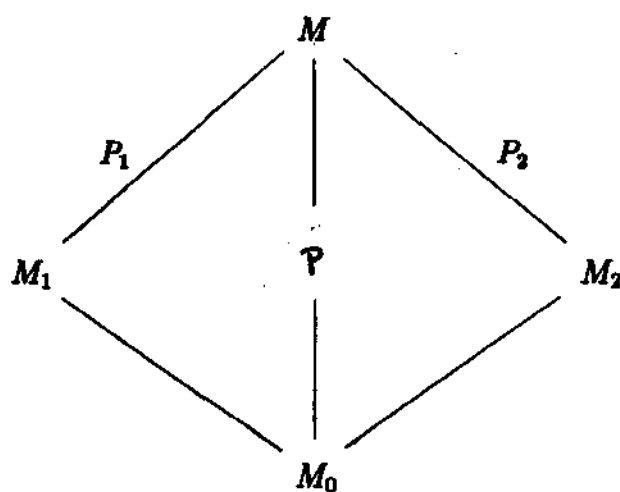


FIGURA 1

são funções de recobrimento Riemanniano. Portanto G age em M por isometrias.

Seja $K(x, y, t)$ (resp. $K_i(\bar{x}, \bar{y}, t), i = 1, 2$) solução fundamental da equação do calor sobre (M, g) (resp. sobre (M_i, g_i)), onde \bar{x} é a projeção de x sobre M_i . Sob estas considerações tem-se o seguinte:

4.3 LEMA:

- (a) $\sum_{h \in H_i} K(x, hy, t)$ é invariante por $H_i \times H_i$
- (b) $K_i(\bar{x}, \bar{y}, t) = \sum_{h \in H_i} K(x, hy, t)$.
- (c) Se $[\gamma]$ é a classe de conjugação de γ em G e $h \in [\gamma]$ então existe $y \in M$ tal que
$$K(x, hx, t) = K(y, \gamma y, t).$$

PROVA:

- (a) Se $(p, q) \in H_i \times H_i$ e como G age por isometrias tem-se

$$\begin{aligned} (p, q) \sum_{h \in H_i} K(x, hy, t) &= \sum_{h \in H_i} K(px, qhy, t) \\ &= \sum_{h \in H_i} K(x, p^{-1}qhy, t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{r \in H_i} K(x, ry, t)$$

onde $r = p^{-1}qh$ e como p, q, h são qualquer r também o é.

Para mostrar (b) são necessários três passos:

(i) Pelo fato que $K(x, y, t)$ é contínua, C^1 na variável t e C^2 na variável y em $M \times M \times \mathbb{R}_+$ então

$$\sum_{h \in H_i} K(x, hy, t)$$

também o é.

(ii) Usando a parte (a) deste Lema e o fato que K é a SFEC tem-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_2 \right) \sum_{h \in H_i} K(x, hy, t) = \sum_{h \in H_i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_2 \right) K(h^{-1}x, y, t) = 0$$

(iii) Como G age por isometrias, então para toda função diferenciável f sobre M ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{M_i} \sum_{h \in H_i} K(x, hx, t) f(x) dV_g(x) &= \sum_{h \in H_i} \frac{1}{o(H_i)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{M_i} K(x, hx, t) f(x) dV_g(x) \\ &= \sum_{h \in H_i} \frac{1}{o(H_i)} \cdot f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Logo pela unicidade da SFEC,

$$K_i(\bar{x}, \bar{y}, t) = \sum_{h \in H_i} K(x, hy, t)$$

(c) Como $h \in [\gamma]$, então existe $p \in G$ tais que $h = p\gamma p^{-1}$. Daí, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} K(x, hx, t) &= K(x, p\gamma p^{-1}x, t) \\ &= K(p^{-1}x, \gamma p^{-1}x, t) (G \text{ age por isometrias}) \\ &= K(y, \gamma y, t) \end{aligned}$$

onde $y = p^{-1}x$.

Lembre que se G é um grupo finito e $H_1 \leq G, H_2 \leq G$ então diz-se que a tripla $(G; H_1, H_2)$ satisfaz a condição de quase conjugação (PC) (Ver 4.2), se H_1 e H_2 não são conjugados, e para todo $p \in G$ $\#([p] \cap H_1) = \#([p] \cap H_2)$. O resultado que se segue fornece uma maneira sistemática de se construir variedades isoespectrais não isométrica.

4.4 TEOREMA (SUNADA, 1985): Seja M uma variedade fechada, com $\dim M \geq 2$. Se a tripla $(G; H_1, H_2)$ satisfaz a condição de quase conjugação (QC), com G agindo sem pontos fixos sobre M , então

(a) Para toda métrica em M tal que G age por isometrias, $M_1 = M/H_1$ e $M_2 = M/H_2$ são Δ -isoespectrais.

(b) Se M for simplesmente conexa, existem métricas sobre M tais que M_1 e M_2 não são isométricas.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $K(x, y, t)$ (resp. $K_i(\bar{x}, \bar{y}, t)$ $i = 1, 2$) a SFEC sobre (M, g) (resp. sobre (M_i, g_i)) onde \bar{x} é a projeção de x sobre M_i . Então se $Z(M_i, t)$ é a função de partição associada com (M_i, g_i) $i = 1, 2$ tem-se

$$\begin{aligned} Z(M_i, g_i, t) &= \int_{M_i} K_i(\bar{x}, \bar{x}, t) dV_g(\bar{x}), \text{ por 3.12(a)} \\ &= \frac{1}{o(H_i)} \int_M \sum_{h \in H_i} K(x, hx, t) dV_g(x), \text{ por 4.3 (b)} \\ &= \sum_{h \in H_i} \frac{1}{o(H_i)} \int_M K(x, hx, t) dV_g(x) \\ &= \sum_{[h] \in [G]} \frac{\#([h] \cap H_i)}{o(H_i)} \int_M K(x, hx, t) dV_g(x), \text{ por 4.3 (c)} \end{aligned}$$

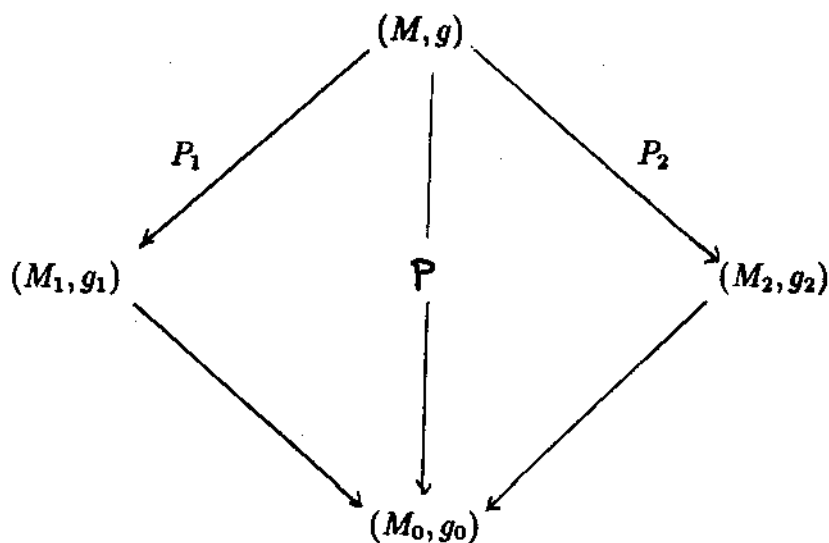
onde $[G]$ é o conjunto de todas as classes de conjugação em G . Como $[G]$ forma uma partição de G $\#([h] \cap H_1) = \#([h] \cap H_2)$ então $o(H_1) = o(H_2)$ e portanto

$$Z(M_1, g_1, t) = Z(M_2, g_2, t)$$

E como a função de partição associada a uma variedade Riemanniana compacta determina seu espectro, as variedades (M_1, g_1) e (M_2, g_2) são Δ -isoespectrais.

O que mostra (a).

Para mostrar (b) considere $(M_0 = M/G, M_i = M/H_i, i = 1, 2)$, observe que pelo Teorema 4.2 existe uma métrica g_0 em M_0 tal que "Para qualquer par de conjuntos abertos e diferentes U, e, V de M_0 tem-se que (U, g_0) e (V, g_0) não são isométricos". E como o diagrama



é um recobrimento Riemanniano com $g_1 = P_1^* g_0$, $g_2 = P_2^* g_0$, e, $g = P^* g_0$ onde P indica a projeção natural respectiva.

Se existe uma isometria φ de (M_1, g_1) sobre (M_2, g_2) , então o levantamento $\tilde{\varphi}$ de φ ao recobrimento universal M está em G . Pois,

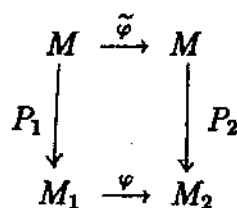


FIGURA 3

$\varphi \circ P_1 = P_2 \circ \tilde{\varphi}$ e como P_1 e P_2 são isometrias locais tem-se $\tilde{\varphi}$ é uma isometria local. Como φ é um homeomorfismo então seu levantamento ao $\tilde{\varphi}$ ao recobrimento universal é um homeomorfismo. Daí $\tilde{\varphi}$ é uma isometria de (M, g) , portanto $\tilde{\varphi} \in G$, e assim existe $r \in G$ tal que $r = \tilde{\varphi}$.

Agora, para cada $x \in M$, $\varphi(P_1(x)) = P_2(\tilde{\varphi}(x))$ isto é, $\varphi(H_1x) = H_2rx$. Como $rx \neq x$ e $rx \in [(rH_1)x] \cap [(H_2r)x]$ o que mostra que $(rH_1)x = (H_2r)x$. Daí se $h_1 \in H_1$ então $rh_1x = h_2rx$ para algum $h_2 \in H_2$, isto é, $(h_2r)^{-1}rh_1x = x$, e como G age sem pontos fixos tem-se $rh_1 = h_2r$. Isto mostra que $rH_1 = H_2r$ que contradiz o fato que H_1 e H_2 não são conjugados.

Isto completa a prova do Teorema de Sunada.

Os exemplos 1 e 2 da definição 4.1 junto com o Teorema 4.4 permitem que construa variedades isoespectrais não isométricas.

4.5 OBSERVAÇÃO: Sunada em seu artigo original ver [SA], não apresenta o Teorema para variedades Riemannianas isoespectrais no caso de variedades com bordo, tantocom a condição de fronteira de Dirichlet como com a condição de fronteira de Neumann. Mas pelas observações feitas em 2.7 o Teorema de Sunada nestes casos vale sem modificações. O Teorema de Sunada também vale para o operador $\Delta^{(p)}$, ver por exemplo [SA] e [BR1].

CONSTRUÇÃO DE VARIEDADES ISOESPECTRAIS

Nesta seção vai-se construir um par de superfícies isoespectrais não isométricas. A construção é feita por blocos e com ajuda dos grafos de Cayley.

GRAFOS

Um grafo G consiste de um conjunto de VÉRTICES e um conjunto de ARESTAS com uma regra que associa a cada aresta do grafo um par de vértices. Se os vértices P, Q estão em uma aresta x , diz-se que x liga P e Q . Os grafos podem-se olhar como figuras. Os vértices representam-se por pontos grossos e as arestas por curvas que ligam esses pontos.

Para descrever a construção de um grafo, aqui é útil olhar cada aresta como a união de duas meias arestas, por exemplo, se x é uma aresta que liga os vértices P e Q diz-se que uma meia aresta de x vem de P e a outra de Q , como no primeiro caso da Figura 4

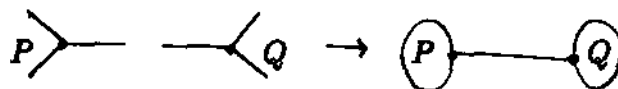


FIGURA 4

Para descrever um grafo, pode-se dar um conjunto de vértices e em cada vértice um número de meias arestas e esse grupo de meias arestas em pares.

Os grafos podem ter estrutura adicional agregando atributos por exemplo cor ou orientação das arestas. Uma orientação de uma aresta x , que liga P e Q pode ser dada dizendo que x vai de P a Q ou de Q a P . Um grafo é chamado orientado se alguma de suas arestas (ou todas) são orientadas. A cor é obtida agrupando arestas em classes de equivalências. Arestas na mesma classe serão ditas "*tem a mesma cor*" ou *que são do mesmo tipo*".

Quando dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{G}' são o mesmo? Diz-se que $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ é um isomorfismo se ϕ é uma função 1 - 1 e envia o conjunto de vértices de \mathcal{G} sobre o conjunto de vértices de \mathcal{G}' tal que qualquer que sejam P, Q ligados pela aresta x então $\phi(P)$ e $\phi(Q)$ são ligados pela aresta x e vice-versa. Se ϕ preserva estrutura adicional diz-se que ϕ é um isomorfismo forte.

Agora, considere um grupo finito G com elementos g, h, A, B etc., e sejam A_1, \dots, A_n uma lista de geradores diferentes dois a dois de G . A lista não precisa ser mínima. Defina o GRAFO DE CAYLEY $\mathcal{G} = \mathcal{G}[A_1, \dots, A_n]$ com respeito aos geradores A_1, \dots, A_n como se segue:

"Qualquer $g \in G$ é um vértice enviando meias arestas $a_1, \tilde{a}_1, \dots, a_n, \tilde{a}_n$. A meia aresta \tilde{a}_i do vértice g e a meia aresta a_i do vértice g' formam uma aresta x , se e só se $gA_i = g'$. A orientação de x é de g a g' ; neste caso diz-se que x é do tipo A_i ".

EXEMPLO 3: Seja $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ com geradores $A = (1, 0)$, e $B = (0, 1)$. O grafo de Cayley $\mathcal{G}[A, B]$ é mostrado na Figura 5. As arestas horizontais são do tipo A e as arestas verticais são do tipo B .

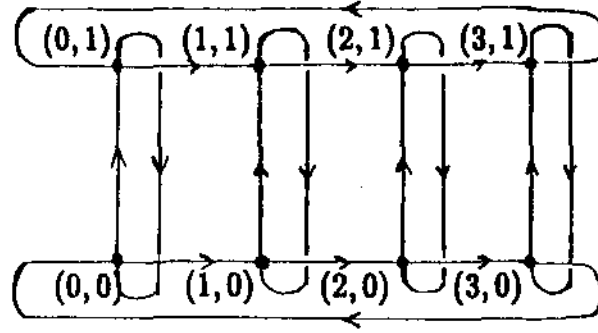


FIGURA 5

Se G é um grafo finito, cada $h \in G$ age sobre o grafo de Cayley \mathcal{G} por multiplicação a esquerda: se $g' = gA_i$ então $hg' = hgA_i$ e vice-versa. Segue que $G : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ age por isomorfismos.

Para cada subgrupo $H \subseteq G$ defina o quociente $H \backslash \mathcal{G}$ como segue:

“cada classe lateral Hg é um vértice emanando meias arestas $a_1, \tilde{a}_1, \dots, a_n, \tilde{a}_n$. Uma meia aresta \tilde{a}_i do vértice Hg' e a_i de Hg formam uma aresta de $H \backslash \mathcal{G}$ se e somente se $g' = hgA_i$ para algum $h \in H$ e a orientação é de Hg a HgA_i e diz-se que a aresta é do tipo A_i ”.

EXEMPLO 4: Considere de novo o grafo da Figura 5 e sejam

$$H_1 = \{(0,0), (2,0)\}, H_2 = \{(0,0), (0,1)\}$$

os vértices dos quocientes $H_1 \backslash \mathcal{G}$, e, $H_2 \backslash \mathcal{G}$ são:

$$\begin{array}{ll} H_1 &= \{(0,0), (2,0)\} & H_2 &= \{(0,0), (0,1)\} \\ (1,0)H_1 &= \{(1,0), (3,0)\} & (1,0)H_2 &= \{(1,0), (1,1)\} \\ (1,0)H_1 &= \{(0,1), (2,1)\} & (2,0)H_2 &= \{(2,0), (2,1)\} \\ (1,1)H_1 &= \{(1,1), (3,1)\} & (3,0)H_2 &= \{(3,0), (3,1)\} \end{array}$$

Os grafos de Cayley para $H_1 \backslash \mathcal{G}$ e $H_2 \backslash \mathcal{G}$ são dados na Figura 6 e 7.

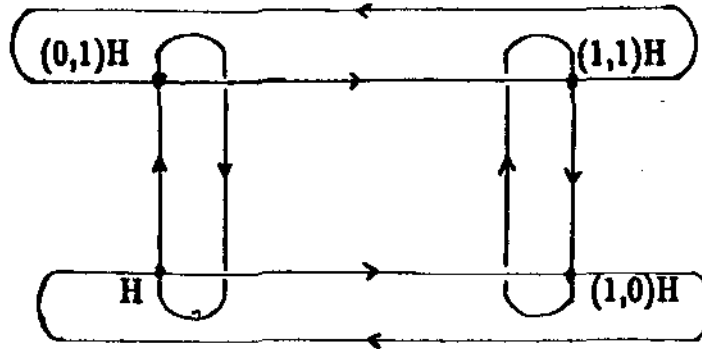


FIGURA 6

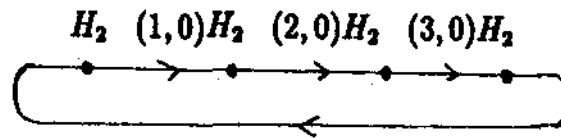


FIGURA 7

EXEMPLO 5: No exemplo 2 do Teorema de Sunada considere $n = 3$ e $p = 2$ isto é, o grupo $G = SL(3, \mathbb{Z}_2)$ e os subgrupos

$$H_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} : * \in \mathbb{Z}_2, e, \det A = 1 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} : * \in \mathbb{Z}_2, e, \det A = 1 \right\}$$

Sabe-se que $o(SL(3, \mathbb{Z}_2)) = 168$ e $o(H_1) = 24 = o(H_2)$.

Denotando por \mathcal{G} o grafo de Cayley associado com G , deseja-se encontrar os grafos $H_1 \setminus \mathcal{G}$ e $H_2 \setminus \mathcal{G}$. De fato

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

geram $G = SL(3, \mathbb{Z}_2)$. O comutador de A e B é

$$C = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Também, observe que

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C^7 = I_3. \end{aligned}$$

Daí, $o(C) = 7$ e $C^k \notin H_i (i = 1, 2)$ a menos que $k \equiv 0 \pmod{7}$, portanto as classes laterais: $H_1, CH_1, C^2H_1, \dots, C^6H_1$ são todas diferentes ao tempo que

$$H_2, CH_2, \dots, C^6H_2$$

também são diferentes (ver exemplo 2 da definição 4.1). Portanto $G/H_1 = \{H_1, CH_1, \dots, C^6H_1\}$, e, $G/H_2 = \{H_2, CH_2, \dots, C^6H_2\}$.

Lembre do exemplo 2 da definição 4.1 que $xH_1 = yH_1$ se e só se a primeira coluna de x , e , y são iguais e não nulas. Daí pode-se identificar cada elemento de G/H_1 com sua primeira coluna, portanto denote os elementos de G/H_1 por:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $f : H_1 \rightarrow H_2$ com $f(h) = (h^{-1})^t$ é um isomorfismo externo então a ação de G sobre G/H_1 dada por $g \cdot e_i$ para cada $g \in G$ implica que a ação de G sobre G/H_2 é dada por $(g^{-1})^t e_i$ para cada $g \in G$, e reciprocamente.

Como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (B^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

têm-se as duas tabelas seguintes

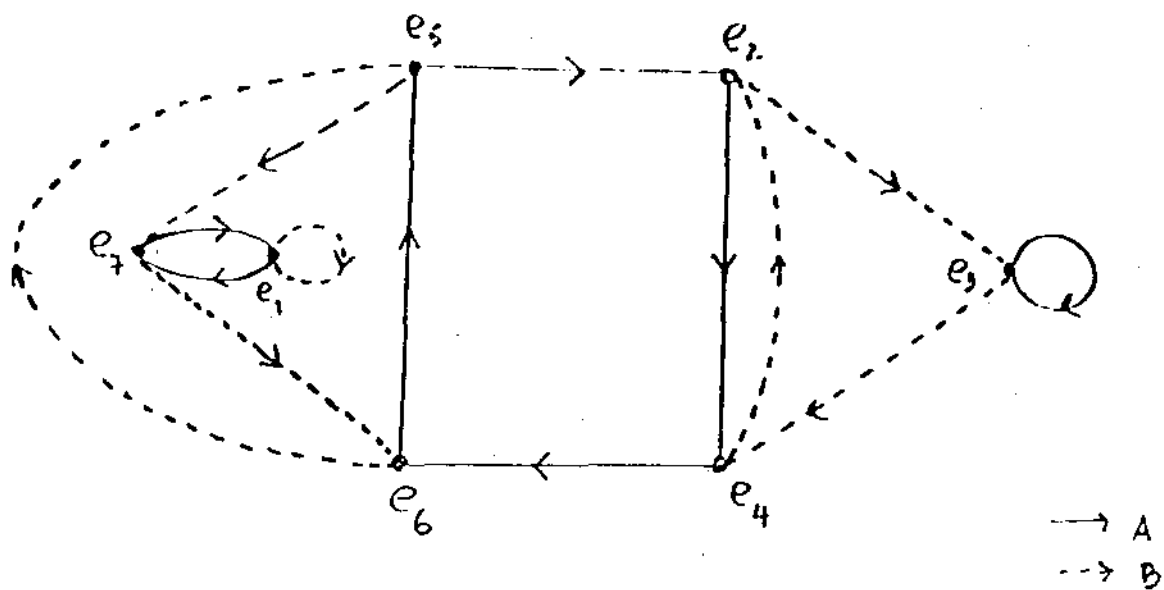
G/H_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$A \cdot e_i$	e_7	e_4	e_3	e_6	e_2	e_5	e_1
$B \cdot e_i$	e_1	e_3	e_4	e_2	e_7	e_5	e_6
$C \cdot e_i$	e_5	e_3	e_1	e_6	e_4	e_7	e_2

TABELA 1

G/H_2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$A \cdot e_i$	e_7	e_6	e_4	e_3	e_5	e_1	e_2
$B \cdot e_i$	e_1	e_4	e_2	e_3	e_6	e_7	e_5
$C \cdot e_i$	e_2	e_4	e_6	e_5	e_7	e_1	e_3

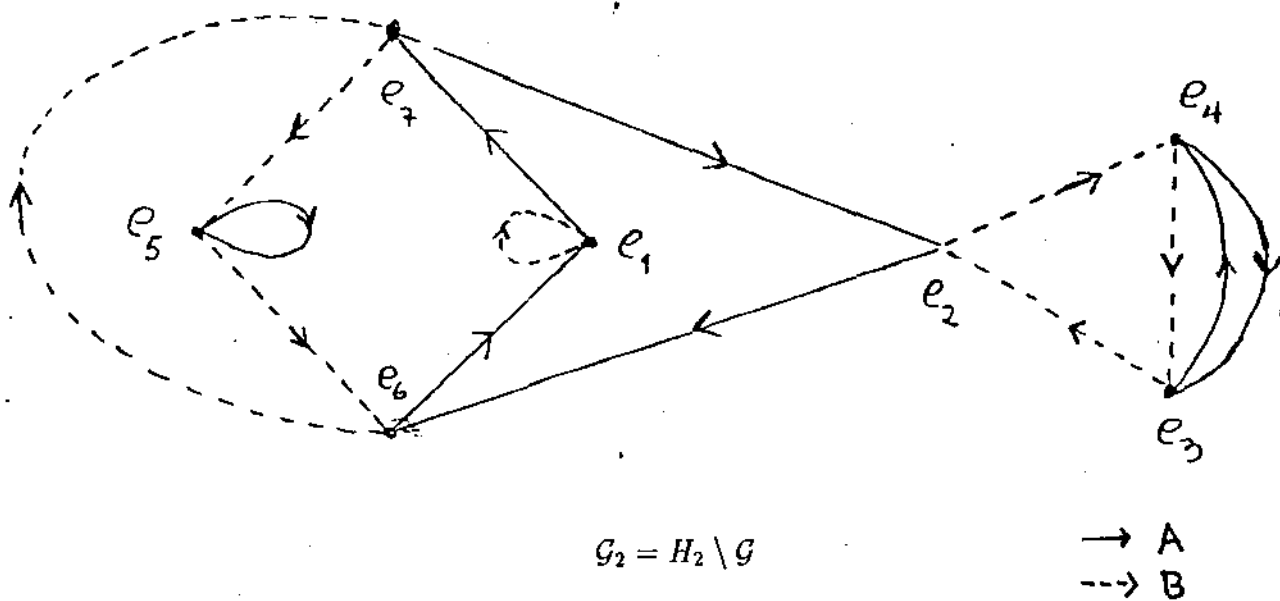
TABELA 2

Os grafos de Cayley $H_1 \setminus \mathcal{G}$ e $H_2 \setminus \mathcal{G}$ são dados na Figura 8 e 9, as flechas pretas são do tipo A e as flechas tracejadas são do tipo B .



$$G_1 = H_1 \setminus G$$

FIGURA 8



$$G_2 = H_2 \setminus G$$

FIGURA 9

OBSERVAÇÃO: Estes grafos são feitos baseados nos artigos de Buser [BR2] e Berard [BD1].

4.6 CONSTRUINDO SUPERFÍCIES ISOESPECTRAIS NÃO ISOMÉTRICAS:

Para se construirem as duas superfícies isoespectrais não isométricas começa-se com um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ com 4 retângulos finais como na Figura 10.

Os lados \bar{a}, a, \bar{b}, b são chamados após os geradores A e B de $SL(3, \mathbb{Z}_2)$ e têm o mesmo comprimento. Pode-se realizar D com um modelo de papel.

Colando-se os lados a, \bar{a} e os lados b, \bar{b} obtém-se uma superfície diferenciável, M_0 , com fronteira diferenciável. M_0 também leva uma métrica plana e é topologicamente uma esfera com três buracos ou um disco com dois buracos, ver Figura 10.

Note que se se colam os lados a, b e os lados \bar{a}, \bar{b} obtém-se um toro com um buraco.

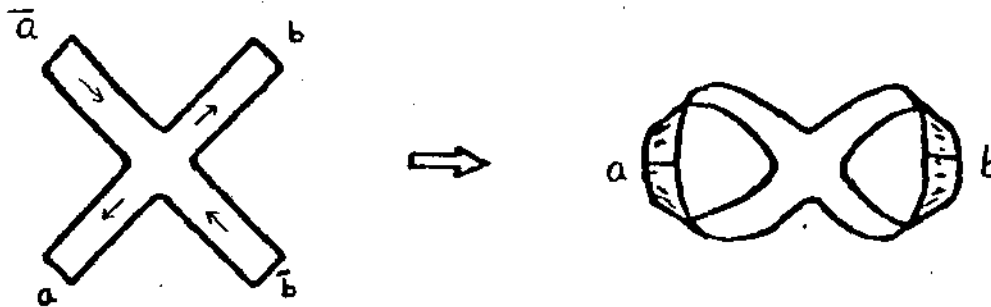


FIGURA 10

O seguinte passo é construir as 168 folhas de papel cobrindo a superfície M de M_0 sobre o qual $G = SL(3, \mathbb{Z}_2)$ age por isometrias. Isto pode ser obtido substituindo cada vértice do grafo de Cayley $\mathcal{G} = \mathcal{G}[A, B]$ emanando meias arestas a, \bar{a}, b, \bar{b} por uma cópia de D com lados a, \bar{a}, b, \bar{b} e então, colando as cópias juntamente e na mesma forma como os vértices aparecem em \mathcal{G} . A superfície M assim obtida é um modelo geométrico de \mathcal{G} e G age sobre M por isometrias da mesma forma que G age em \mathcal{G} por isomorfismos fortes.

Sejam

$$M_1 = M/H_1 \text{ e } M_2 = M/H_2$$

Como a ação de G sobre M é compatível com a ação sobre \mathcal{G} , M_1 e M_2 podem ser também obtidas colando cópias de D a partir dos grafos $H_1 \setminus \mathcal{G}$, e, $H_2 \setminus \mathcal{G}$ nas Figuras 8 e 9 respectivamente.

Pelo Teorema de Sunada (ver observação 4.5)

$$(M_1, P_1^* g_0) \text{ e } (M_2, P_2^* g_0)$$

são Δ -isoespectrais para todo p , com a condição de fronteira segundo Dirichlet ou Neumann, ver Figura 11 e 12.

Para mostrar que a topologia M_1 e M_2 é a de uma esfera com nove buracos ou um disco com oito buracos olhe nas Figuras 8 e 9. Primeiramente os dois grafos são planares, isto é, eles podem ser desenhados no plano sem cruzamento de arestas. E quando se circula em torno de um vértice no sentido positivo, encontra-se sempre a sequência $a\bar{b}b\bar{a}$.

Finalmente, como pode-se ler os grafos \mathcal{G}_1 , e, \mathcal{G}_2 olhando em M_1 e M_2 , tem-se portanto que M_1 e M_2 não são isométricas, pois não existe um isomorfismo forte de \mathcal{G}_1 em \mathcal{G}_2 .

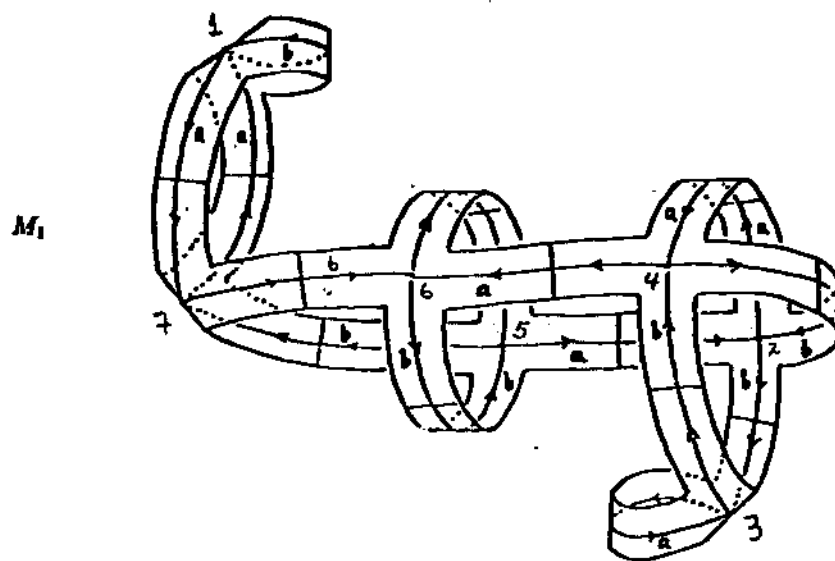


FIGURA 11

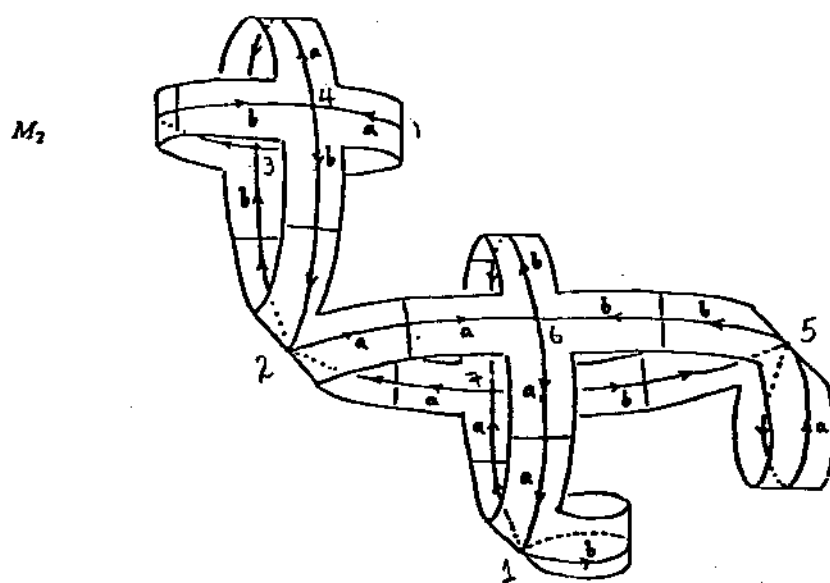


FIGURA 12

OBSERVAÇÃO: Estas figuras são feitas baseadas no artigo de Buser [BR2], ver também [G-W-W2].

DOMÍNIOS PLANOS ISOESPECTRAIS

Nesta seção deseja-se apresentar um exemplo de domínios planos isoespectrais (com a condição de bordo segundo Dirichlet ou Neumann). Esses domínios são obtidos, a partir do exemplo de superfícies isoespectrais construído em 4.6, por quociente por um plano simétrico que “*corta as superfícies em dois*” e de fato dois domínios planos (tem-se então uma involução sobre cada superfície).

A exposição se fará via “*transplantação*”.

4.7 TRANSPLANTAÇÃO DIRETA: Introduzem-se as duas matrizes seguintes T^N e T^D (os expoentes N e D , transporta-se às condições de Neumann e Dirichlet respectivamente)

$$T^N = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & a & a & b \\ a & a & b & b & b & a & a \\ a & b & b & a & a & b & a \\ b & a & b & a & a & a & b \\ b & a & a & b & a & b & a \\ b & b & a & a & b & a & a \end{pmatrix}$$

$$T^D = \begin{pmatrix} -a & a & a & -a & b & -b & b \\ a & -b & -a & b & -a & a & -b \\ a & -a & -b & b & -b & a & -a \\ -a & b & b & -a & a & -b & a \\ -b & a & b & -a & a & -a & b \\ b & -a & -a & b & -a & b & -a \\ -b & b & a & -a & b & -a & a \end{pmatrix}$$

onde os números reais estão ligados pelas relações

$$\begin{aligned} 4a^2 + 3b^2 &= 1, \\ 2a^2 + 4ab + b^2 &= 0, \\ 4a + 3b &= 1. \end{aligned}$$

Observe que as matrizes T^N e T^D são ortogonais ^(*).

Considere igualmente os grafos seguintes (eles são diferentes pelo fato que os números são trocados e que as letras A e τ nas arestas são permutadas).

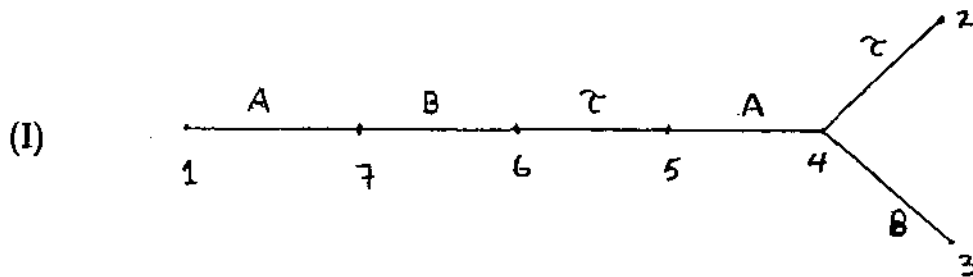


FIGURA 13

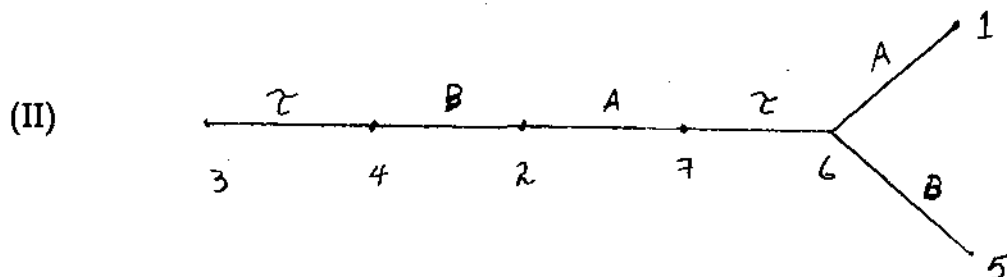


FIGURA 14

Considera-se agora um bloco fundamental P com tres cortes privilegiado chamados a, b, τ respectivamente ver Figura 15 (esse bloco corresponde à metade do bloco funda-

^(*) Estas matrizes foram apresentadas por primeira vez por Berard, P. e têm origem no artigo: Gordon - Webb - Wolpert - *One can't hear the shape of a drum*, Annonce de Recherche (1991).

mental dado em 4.6 Figura 10, ver também Buser [BR]).

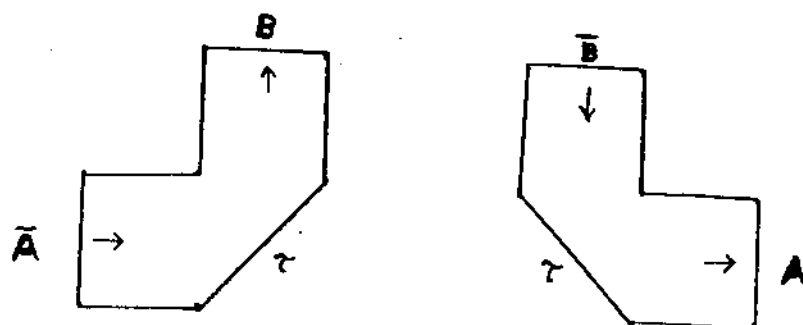
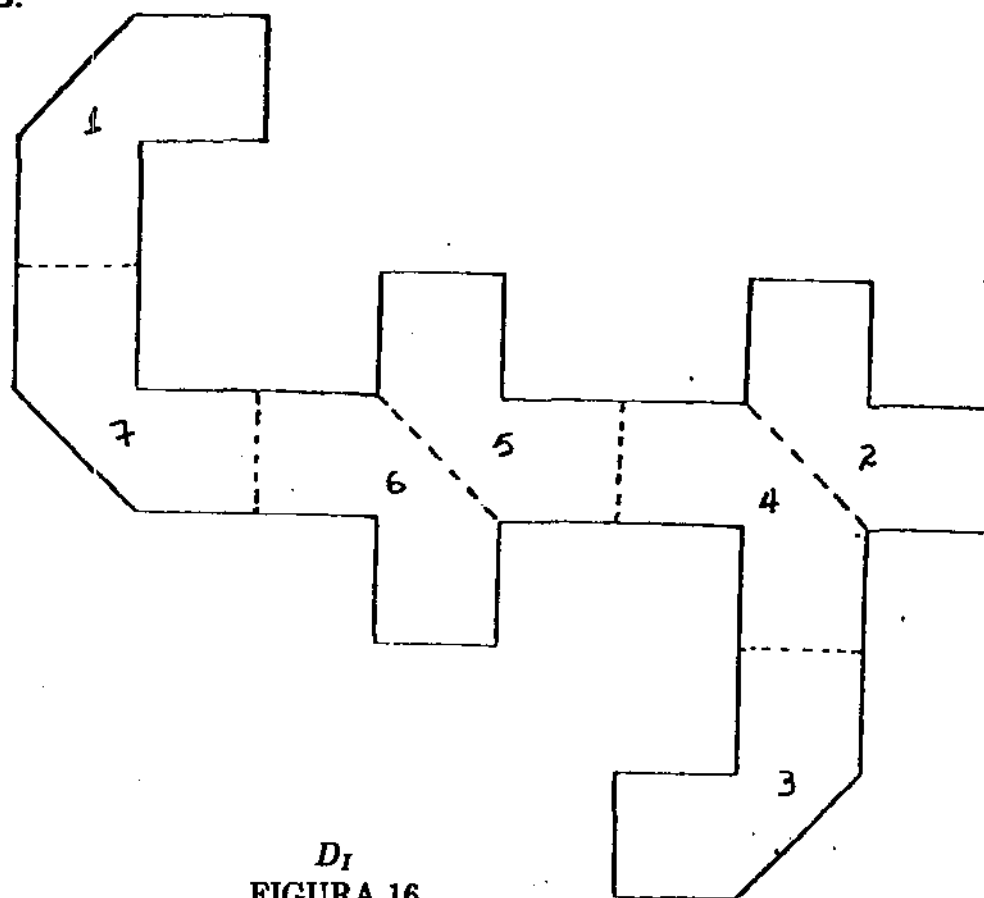


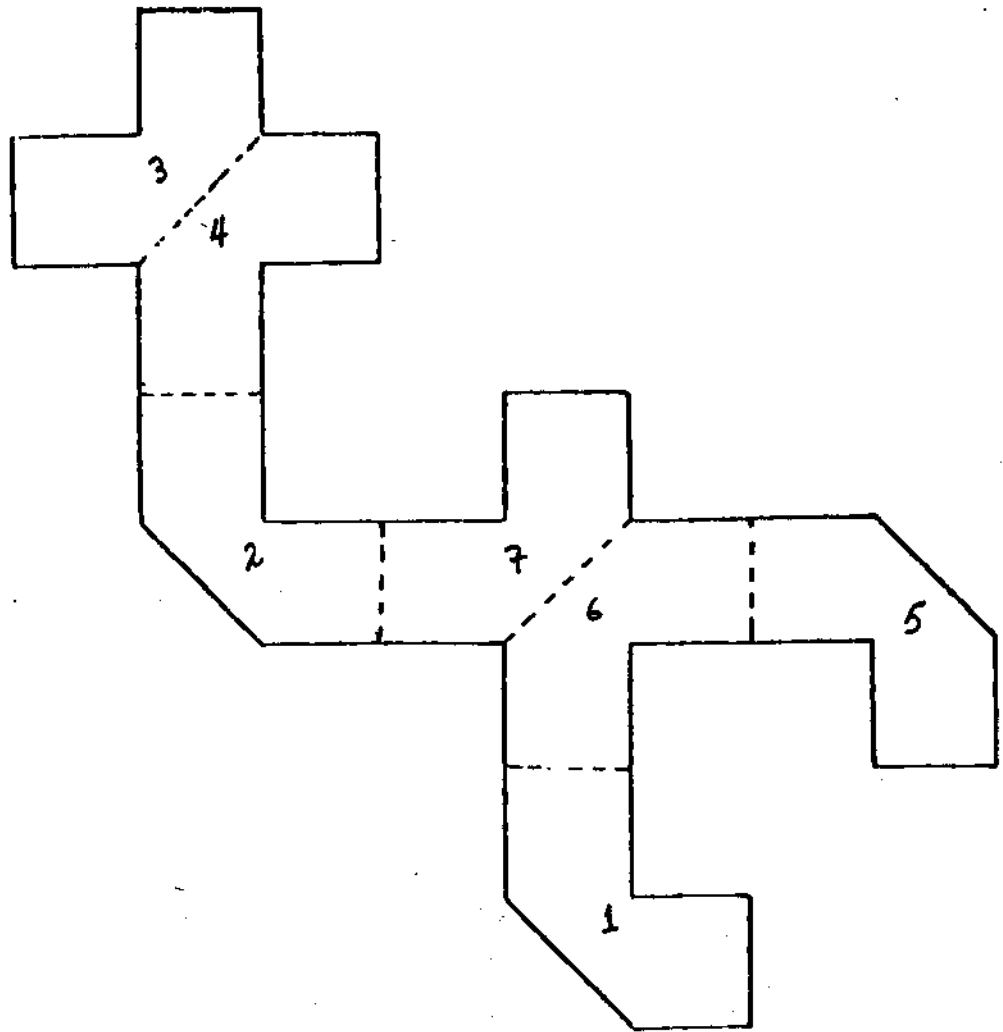
FIGURA 15

Toma-se 7 exemplares do bloco P segundo a combinatória dos grafos (I) e (II) da Figuras 13 e 14. Obtem-se assim dois domínios planos D_I e D_{II} (Figura 16 e 17), colando A com \bar{A} e B com \bar{B} .



D_I
FIGURA 16

OBSERVAÇÃO: As figuras 16 e 17 são feitas baseadas no artigo de Berard [BD5].



D_{II}
FIGURA 17

Agora, considere uma função φ sobre D_I , e denote por φ_i sua restrição aos 7 blocos de base que formam $D_I (i \in \{1, 2, \dots, 7\})$, isso escreve-se como

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_7 \end{pmatrix}$$

Associa-se à função φ a função $\psi = \tau^*(\varphi)$, sobre D_{II} , definida por:

$$\psi = T^* \cdot \varphi$$

onde $*$ $\in \{N, D\}$ de acordo com o problema, isto é, se o problema é segundo Neumann o Dirichlet.

4.8 TEOREMA:

- (a) A aplicação τ^N é uma isometria do espaço $L^2(D_I)$ sobre o espaço $L^2(D_{II})$ que induz uma isometria do espaço $H^1(D_I)$ sobre o espaço $H^1(D_{II})$.
- (b) A aplicação τ^D é uma isometria do espaço $L^2(D_I)$ sobre o espaço $L^2(D_{II})$ que induz uma isometria do espaço $H_0^1(D_I)$ sobre o espaço $H_0^1(D_{II})$.

PROVA: O fato que a aplicação τ^* seja uma isometria é consequência do fato que as matrizes τ^* são ortogonais. Para os espaços H^1 (resp. H_0^1), falta verificar que as funções se colam bem (resp. que as funções se colam bem e que elas se anulam no bordo). Nota-se por ψ_i^A o traço de ψ_i sobre o bordo A do i -ésimo bloco etc. É necessário então verificar as seguintes condições sobre o grafo Π (Figura 14):

- (N) Condição de Neumann.

Neste caso é necessário verificar as condições de compatibilidades seguintes:

$$\begin{aligned}\psi_3^T &= \psi_4^T \\ \psi_4^B &= \psi_2^B \\ \psi_2^A &= \psi_7^A \\ \psi_7^T &= \psi_6^T \\ \psi_6^A &= \psi_1^A \\ \psi_6^B &= \psi_5^B.\end{aligned}$$

Elas garantem que as funções coincidem ao longo dos bordos de colagem.

- (D) Condição de Dirichlet.

Além das condições de compatibilidades anteriores tem-se que juntar as condições de anulação no bordo seguintes:

$$\begin{aligned}\psi_3^A &= 0, \text{ e, } \psi_3^B = 0 \\ \psi_4^A &= 0 \\ \psi_2^\tau &= 0 \\ \psi_1^B &= 0, \text{ e, } \psi_1^\tau = 0 \\ \psi_5^A &= 0, \text{ e, } \psi_5^\tau = 0.\end{aligned}$$

Elas garantem que as funções verificam a condição de Dirichlet sobre o bordo dos domínios.

Como estas verificações são simples, por exemplo, verificam-se: $\psi_3^\tau = \psi_4^\tau$ e $\psi_3^A = 0$ para a condição de Dirichlet. De fato

$$\psi_3 = a\varphi_1 - a\varphi_2 - b\varphi_3 + b\varphi_4 - b\varphi_5 + a\varphi_6 - a\varphi_7$$

Da mesma forma

$$\psi_4 = -a\varphi_1 + b\varphi_2 + b\varphi_3 - a\varphi_4 + a\varphi_5 - b\varphi_6 + a\varphi_7$$

Portanto

$$\psi_3^\tau = a\varphi_1^\tau - a\varphi_2^\tau - b\varphi_3^\tau + b\varphi_4^\tau - b\varphi_5^\tau + a\varphi_6^\tau - a\varphi_7^\tau$$

As condições de Dirichlet para $\varphi : 0 = \varphi_1^\tau = \varphi_3^\tau = \varphi_7^\tau$ implicam

$$\varphi_3^\tau = -a\varphi_2^\tau + b\varphi_4^\tau - b\varphi_5^\tau + a\varphi_6^\tau$$

Pelas condições de colagem: $\varphi_2^\tau = \varphi_4^\tau, \varphi_6^\tau = \varphi_5^\tau$ tem-se

$$\varphi_3^\tau = (b - a)\varphi_2^\tau + (a - b)\varphi_5^\tau.$$

Também

$$\begin{aligned}
\psi_4^\tau &= -a\varphi_1^\tau + b\varphi_2^\tau + b\varphi_3^\tau - a\varphi_4^\tau + a\varphi_5^\tau - b\varphi_6^\tau + a\varphi_7^\tau \\
&= b\varphi_2^\tau - a\varphi_4^\tau + a\varphi_5^\tau - b\varphi_6^\tau \\
&= (b-a)\varphi_2^\tau + (a-b)\varphi_5^\tau \\
&= \psi_3^\tau.
\end{aligned}$$

Veja que $\psi_3^A = 0$. De fato

$$\psi_3^A = a\varphi_1^A - a\varphi_2^A - b\varphi_3^A + b\varphi_4^A - b\varphi_5^A - a\varphi_7^A$$

Como $0 = \varphi_2^A = \varphi_3^A = \varphi_6^A, \varphi_1^A = \varphi_7^A$, e $\varphi_5^A = \varphi_4^A$ tem-se

$$\psi_3^A = a\varphi_1^A + b\varphi_4^A - b\varphi_5^A - a\varphi_7^A = 0$$

o que mostra o Teorema.

4.9 COROLÁRIO: Os domínios D_I e D_{II} são isoespectrais para todos os Laplacianos de Neumann e Dirichlet.

Este Corolário é consequência imediata do Teorema de caracterização variacional dos valores próprios (Teorema 2.5). Deduz-se dos grafos (I) e (II) (Figura 13 e 14) que os domínios D_I e D_{II} não são isométricos.

REFERÊNCIAS

- [A-M-R] Abraham - Marsden - Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis and Application*. Addison - Wesley (1983).
- [BS] Beals, R.: *Advanced Mathematical Analysis*. Springer - Verlag (1973).
- [B-G-M] Berger - Gauduchon - Mazet: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. Springer Lecture Notes 194 (1971).
- [BD1] Bérard, P.: *Variété Riemanniennes isospectrales non isométriques*. Astérisque Séminario Bourbaki 127-154 (1988-1989).
- [BD2] Bérard, P.: *Analysis on Riemann Manifolds and Geometric Applications*. Monografias de Matemática n^o 42. IMPA (1986).
- [BD3] Bérard, P.: *Spectral Geometry: Direct and Inverse Problems*. Springer Lecture Notes in Math. 1207 (1986).
- [BD4] Bérard, P.: *Transplantation et Isospectralité I*. Math. Ann. 292, 547-559 (1992).
- [BD5] Bérard P.: *Domaines Plans Isospectraux à la Gordon - Webb - Wolpert*. Une Preuve terre a terre. Isos 3. Tex (13 Nov. 1991).
- [BY] Boothby, W.: *An Int. to Diff. Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press (1975).
- [BS] Brezis, H.: *Analyse Fonctionnelle* 2^e tirage (1987).
- [BK1] Brook, R.: *On Manifolds of Negative Curvature with isospectral potentials*. Topology, vol. 36, 63-66 (1987).

- [BK2] Brook, R.: *Constructing Isospectral Manifolds*. Amer. Math. Monthly 95, 823–839 (1988).
- [BR1] Buser, P.: *Isospectral Riemann Surfaces*. Ann. Inst. Fourier 36, 167–192 (1986).
- [BR2] Buser, P.: *Cayley Graphs and Planar Isospectral Domains*. Springer Lecture Notes in Math. 1339, 64–77 (1988).
- [DC] Do Carmo, M.: *Geometria Riemanniana*, 2ª Edição Projecto Euclides. IMPA (1988).
- [FD] Folland G.: *Real Analysis*, John Willey & Sons. New York (1984).
- [G-G] Golubitsky - Guillemin: *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer – Verlag (1973).
- [G-H-L] Gallot - Hulin - Lafontaine: *Riemanniana Geometry 2nd Edition*. Springer – Verlag (1990).
- [G-T] Gilbarg - Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order*, Springer.
- [G-H] Greenberg - Harper: *Algebraic Topology: A Firts Course*. Benjamin - Cumming (1981).
- [GK] Guralnick, R.: *Subgroups Inducing the Same Permutation Representation*. Journal of Algebra 81, 312–319 (1983).
- [G-W-W1] Gordon - Webb - Wolpert: *One can't hear the shape of drum*, Annonce de Recherche (1991).

- [G-W-W2] Gordon - Webb - Wolpert: *Isospectral Plane Domains and Surfaces Via Riemannian Orbifolds*. Preprint.
- [HN] Herstein, I.: *Topics in Algebra 2nd Edition* Xerox Corporations (1975).
- [H-K] Hoffman - Kunze: *Algebra Linear*. USP - Polígono (1961).
- [IA] Ikeda, A.: *On lens spaces which are isospectral but not isometric*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 13, 303-316 (1981).
- [I-I] Iorio, R. e Iorio, V.: *Equações Diferenciais Parciais*. Projecto Euclides, IMPA .
- [JN] John, F.: *Partial Differential Equation*. Fourth Edition. Springer - Verlag (1982).
- [KC] Kac, M.: *Can one Hear the Shape of a Drum?*. Amer. Math. Monthly. 73, 1-23 (1966).
- [MY] Massey, W.: *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer - Verlag (1967).
- [MR1] Milnor, J.: *Morse theory*. Annals of Mathematical Studies. Study 51. Princeton Univ. Press.
- [MR2] Milnor, J.: *Eigenvalues of the Laplace operator on certain Manifolds*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964), 542.
- [MS] Munkres, J.: *Topology: a First Course*. Printece-Hall (1975).
- [NN] Narasimhan, R.: *Analysis on Real and Complex Manifolds*. North - Holland (1968).
- [PI] Patodi, V.: *Curvature and the Eigenforms of the Laplace operator*. J. Diff. Geometry 5, 233-244 (1971).

- [PE] Pesce, H.: *Borne Explicit du Nombre de Tores plats Isospectraux à un Tore Donné*. Manuscripta Math. 75, 211–223 (1992).
- [PR] Poor, W.: *Diff. Geom. Structures*. Mc Graw–Hill (1981).
- [RN] Rotman, J.: *The Theory of Groups: An Introduction 2nd Edition*. Allyn and Bacon (1973).
- [RN] Rudin, W.: *Principles of Math. Analysis*. Third Edition. Mc Graw – Hill (1976).
- [SA] Sunada, T.: *Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds*. Ann. of Math. 121, 169–186 (1985).
- [WR] Warner, F.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott, Foresman and Company (1971).